Chapitre 3

Espaces probabilisés

1 Espaces probabilisés **2**
- 1.1 Espaces probabilisables 2
- 1.2 Espaces probabilisés 2
- 1.3 Probabilités conditionnelles 3

2 Calculs de probabilités **3**
- 2.1 Probabilité d'une union 3
- 2.2 Probabilité d'une intersection 5
- 2.3 Formule des probabilités totales 7

Compétences attendues.

✓ Savoir modéliser une expérience probabiliste en la traduisant en langage mathématique.

✓ Maitriser les principes de calculs des probabilités.

✓ Reconnaitre une situation où il faut utiliser la formule des probabilités totales, introduire le bon système complet d'événements et obtenir la formule.

Anthony Mansuy
Professeur de Mathématiques en deuxième année de CPGE filière ECE au Lycée Clemenceau (Reims)
Page personnelle : `http://anthony-mansuy.fr`
E-mail : `mansuy.anthony@hotmail.fr`

1 Espaces probabilisés

1.1 Espaces probabilisables

Définition.

Soit Ω un ensemble et $\mathscr{A}$ un sous-ensemble de $\mathscr{P}(\Omega)$. On dit que $\mathscr{A}$ est une **tribu** (ou σ-algèbre) de Ω si :

- $\Omega \in \mathscr{A}$.
- $\mathscr{A}$ est stable par passage au complémentaire : si $A \in \mathscr{A}$, alors $\overline{A} \in \mathscr{A}$.
- $\mathscr{A}$ est stable par réunion dénombrable : si I est une partie (finie ou non) de $\mathbb{N}$ et si $(A_i)_{i\in I}$ est une suite d'éléments de $\mathscr{A}$, alors $\bigcup_{i\in I} A_i \in \mathscr{A}$.

On dit alors que $(\Omega, \mathscr{A})$ est un **espace probabilisable**, et les éléments de $\mathscr{A}$ sont appelés **événements**.

Remarque. Dans la pratique, on connait rarement la tribu sur laquelle on travaille. Le seul cas où on a vraiment accès à cette tribu est celui où Ω est un ensemble fini (c'est-à-dire lorsqu'on considère une expérience n'ayant qu'un nombre fini d'issues possibles). Dans ce cas, $\mathscr{A} = \mathscr{P}(\Omega)$ est l'ensemble des parties de Ω.

Exemple. On considère l'expérience consistant à lancer successivement deux dés.

- L'univers est $\Omega = [\![1, 6]\!]^2$. Autrement dit, un élément de Ω est un couple de la forme (i, j), où i représente le résultat du premier dé et j celui du second.
- La tribu $\mathscr{A}$ est l'ensemble des parties de Ω. Par exemple :
  - L'événement "le premier dé vaut 6" est la partie
  $$\{(6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6)\} \subset \Omega.$$
  - L'événement "la somme des deux dés est paire" est
  $$\{(1, 1), (1, 3), \dots, (2, 2), \dots, (6, 4), (6, 6)\} \subset \Omega.$$

1.2 Espaces probabilisés

Définition.

On dit qu'une application $P : \mathscr{A} \to [0, 1]$ est une **probabilité** sur un espace probabilisable $(\Omega, \mathscr{A})$ si elle vérifie les conditions suivantes :

- $P(\Omega) = 1$.
- Si I est une partie (finie ou non) de $\mathbb{N}$ et si $(A_i)_{i\in I}$ est une suite d'événements **deux à deux incompatibles**, alors on a :
$$P\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \sum_{i\in I} P(A_i).$$

On dit alors que $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ est un **espace probabilisé**.

Dans toute la suite du chapitre, $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ désignera un espace probabilisé.

Propriété 1 (d'une probabilité)

(1) Pour tout événement $A \in \mathscr{A}$, $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$. En particulier, $P(\emptyset) = 0$.

(2) Si $A, B \in \mathscr{A}$ sont deux événements tels que $A \subset B$, alors $P(A) \leq P(B)$.

Preuve.

□

Vocabulaire. Un événement $A \in \mathscr{A}$ est dit :

- **certain** si $A = \Omega$ et **certain presque sûrement** (ou **quasi-certain**) si $P(A) = 1$.
- **impossible** si $A = \emptyset$ et **impossible presque sûrement** (ou **quasi-impossible**) si $P(A) = 0$.

1.3 Probabilités conditionnelles

Définition.

Soit $B \in \mathscr{A}$ un évènement tel que $P(B) > 0$. Pour tout événement A, on appelle **probabilité de A sachant B** le réel noté $P_B(A)$ défini par :

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Propriété 2 (d'une probabilité conditionnelles)

P_B est une probabilité sur $(\Omega, \mathscr{A})$.

Remarque. Comme conséquence de ce résultat, toutes les règles de calcul sur les probabilités s'appliquent aussi pour P_B. Ainsi par exemple $P_B(\overline{A}) = 1 - P_B(A)$.

2 Calculs de probabilités

2.1 Probabilité d'une union

Définition.

- Deux événements A et B sont dits **incompatibles** lorsqu'ils ne peuvent pas être réalisés simultanément, c'est-à-dire si $A \cap B = \emptyset$.
- Soit I une partie (finie ou non) de $\mathbb{N}$ et $(A_i)_{i \in I}$ une famille d'événements.

  On dit que les évènements A_i sont **deux à deux incompatibles** si pour tous $i \neq j$, A_i et A_j sont incompatibles.

Propriété 3 (Probabilité d'une union finie)

(1) Si les $(A_i)_{1\leq i\leq n}$ sont **deux à deux incompatibles**, on a :

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i).$$

(2) Dans le cas général, on utilisera les formules suivantes :

- Si $n = 2$,
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

- Si $n = 3$,
$$\begin{aligned} P(A \cup B \cup C) &= P(A) + P(B) + P(C) - (P(A \cap B) + P(A \cap C) + P(B \cap C)) \\ &\quad + P(A \cap B \cap C). \end{aligned}$$

Preuve.

□

Propriété 4 (Probabilité d'une union dénombrable)

(1) Si les $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont **2 à 2 incompatibles** alors la série $\sum_{n\geq 0} P(A_n)$ converge et on a :

$$P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n) \quad (\textit{propriété de } \sigma\textit{-additivité}).$$

(2) Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une **suite croissante d'événements**, c'est-à-dire telle que $A_n \subset A_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors on a :

$$P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} P(A_n) \quad (\textit{propriété de la limite monotone}).$$

(3) Dans le cas général, on a : $P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} P\left(\bigcup_{i=0}^{n} A_i\right)$.

2.2 Probabilité d'une intersection

Définition.

- Deux événements A et B sont dits **indépendants** si
$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B).$$
- Soit I une partie (finie ou non) de $\mathbb{N}$ et $(A_i)_{i\in I}$ une famille d'événements.
On dit que les événements de la famille $(A_i)_{i\in I}$ sont **deux à deux indépendants** si
$$\forall i \neq j, \quad P\left(A_i \cap A_j\right) = P(A_i)P(A_j).$$
- Soit I une partie (finie ou non) de $\mathbb{N}$ et $(A_i)_{i\in I}$ une famille d'événements.
On dit que les événements de la famille $(A_i)_{i\in I}$ sont **mutuellement indépendants** si, pour toute partie finie $J \subset I$,
$$P\left(\bigcap_{j\in J} A_j\right) = \prod_{j\in J} P(A_j).$$

Remarque. La plupart du temps, l'indépendance se déduit de la situation. Des événements sont **mutuellement indépendants** lorsque la réalisation de l'un ne donne pas d'information sur la réalisation des autres.

Attention.

1. Il ne faut surtout pas confondre **incompatibilité** et **indépendance** :
   - A et B sont incompatibles : notion intrinsèque aux événements A et B (ne dépend pas de la probabilité P).
   - A et B sont indépendants : notion qui dépend de la probabilité P.
2. Si des événements sont mutuellement indépendants alors ils sont deux à deux indépendants mais la réciproque est fausse. On retiendra que :
$$\begin{array}{rcl}\text{indépendance mutuelle} & \Longrightarrow & \text{indépendance deux à deux}\\ \text{indépendance mutuelle} & \cancel{\Longleftarrow} & \text{indépendance deux à deux}\end{array}$$

Exemple. Soient A, B, C trois événements. Alors :

A, B, C sont deux à deux indépendants si :
$$\begin{aligned}P(A\cap B) &= P(A)P(B)\\ P(A\cap C) &= P(A)P(C)\\ P(B\cap C) &= P(B)P(C)\end{aligned}$$

A, B, C sont mutuellement indépendants si :
$$\begin{aligned}P(A\cap B) &= P(A)P(B)\\ P(A\cap C) &= P(A)P(C)\\ P(B\cap C) &= P(B)P(C)\\ P(A\cap B\cap C) &= P(A)P(B)P(C)\end{aligned}$$

Propriété 5 (Indépendance d'événements)

(1) Si $P(A) \neq 0$, A et B sont indépendants si et seulement si $P_A(B) = P(B)$.

(2) Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille d'événements, avec I une partie (finie ou non) de $\mathbb{N}$. Pour tout $i \in I$, on pose :
$$B_i = A_i \quad \text{ou bien} \quad B_i = \bar{A}_i.$$
Alors on a :
$$(A_i) \text{ mut. indép. (resp. 2 à 2 indép.)} \quad \Leftrightarrow \quad (B_i) \text{ mut. indép. (resp. 2 à 2 indép.)}$$

(3) Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille d'événements **mutuellement indépendants**, avec I une partie (finie ou non) de $\mathbb{N}$. Tout événement formé avec certains événements de la famille $(A_i)_{i\in I}$ est **indépendant** de tout événement formé à partir d'autres événements de $(A_i)_{i\in I}$.

Preuve.

□

Propriété 6 (Probabilité d'une intersection finie)

(1) Si les $(A_i)_{1\leq i\leq n}$ sont **mutuellement indépendants**, on a :

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = \prod_{i=1}^{n} P(A_i).$$

(2) Dans le cas général, on a la **formule des probabilités composées** si $P(A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1}) \neq 0$:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) = P(A_1) \times P_{A_1}(A_2) \times P_{A_1\cap A_2}(A_3) \times \ldots \times P_{A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_{n-1}}(A_n).$$

Méthode.

On utilisera la ***formule des probabilités composées*** *lorsque des événements $A_1, \ldots, A_n$ se produisent de façon successive dans le temps, chaque résultat influant sur les suivants : c'est en sachant que A_1 est réalisé qu'on peut déterminer $P_{A_1}(A_2)$, puis en sachant que A_1 et A_2 sont réalisés qu'on peut déterminer $P_{A_1\cap A_2}(A_3)$ et ainsi de suite.*

Exercice. Une urne contient 4 boules blanches et 2 boules noires. On tire 3 boules successivement. Quelle est la probabilité de l'évènement "tirer une boule noire pour la première fois au troisième tirage" dans les cas suivants :

- Tirages successifs avec remise.

- Tirages successifs sans remise.

Propriété 7 (Probabilité d'une intersection dénombrable)

(1) Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une **suite décroissante d'événements**, c'est-à-dire telle que $A_{n+1} \subset A_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors on a :

$$P\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} P(A_n) \qquad (\textit{propriété de la limite monotone}).$$

(2) Dans le cas général, on a : $P\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} P\left(\bigcap_{i=0}^{n} A_i\right)$.

2.3 Formule des probabilités totales

Définition.

Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille d'événements **deux à deux incompatibles**, avec I une partie (finie ou non) de $\mathbb{N}$.

- $(A_i)_{i\in I}$ est un **système complet d'événements** si $\bigcup_{i\in I} A_i = \Omega$.
- $(A_i)_{i\in I}$ est un **système presque complet d'événements** si $P\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = 1$.

Remarque. On peut schématiser ces définitions de la manière suivante :

Exercice. On lance une infinité de fois une pièce équilibrée. Pour tout $i \geq 1$, on note A_i l'événement : "le premier face arrive au i-ième lancer".

1. La famille $(A_i)_{i\geq 1}$ est-elle un système complet d'évènements ?

2. Montrer que la famille $(A_i)_{i\geq 1}$ est un système presque complet d'évènements.

Remarque. Un système complet d'événements est aussi un système presque complet d'événements. Mais la réciproque est fausse, comme on le voit avec l'exemple précédent.

Propriété 8 (Système complet d'événements)

Soit $(A_i)_{i\in I}$ un **système complet d'événements**, avec I une partie (finie ou non) de $\mathbb{N}$.

(1) Pour tout événement $B \in \mathscr{A}$,
$$B = \bigcup_{i\in I}(A_i \cap B)$$
et c'est une **union d'événements deux à deux incompatibles**.

(2) Si $(A_i)_{i\in I}$ est un **système complet d'événements**, alors $\displaystyle\sum_{i\in I} P(A_i) = 1$.

Preuve.

□

Théorème 9 (Formule des probabilités totales)

Soit $B \in \mathscr{A}$ un événement dont on cherche à calculer la probabilité. Lorsqu'on ressent un manque d'information pour obtenir $P(B)$ directement, on utilisera la démarche suivante :

(1) On **introduit un système complet d'événements** $(A_i)_{i\in I}$ bien choisi pour lever le manque d'information sur l'événement B (avec I une partie finie ou non de $\mathbb{N}$).

(2) On **décompose l'événement** B **sur le système complet d'événements** $(A_i)_{i\in I}$:
$$B = \bigcup_{i\in I}(A_i \cap B)$$

(3) Comme c'est une **union d'événements deux à deux incompatibles**, on obtient :
$$P(B) = P\left(\bigcup_{i\in I}(A_i \cap B)\right) = \sum_{i\in I} P(A_i \cap B).$$

(4) De plus, si pour tout $i \in I$, $P(A_i) \neq 0$, alors avec la **formule des probabilités composées**, on obtient :
$$P(B) = \sum_{i\in I} P(A_i) P_{A_i}(B).$$

Méthode.
On utilisera cette formule lorsqu'on effectue une expérience aléatoire en plusieurs étapes. Elle permet de raisonner par disjonction des cas, suivant le résultat de l'étape précédente, pour déterminer la probabilité à l'étape suivante.

Exercice. On dispose de n urnes ($n \geq 2$), numérotées de 1 à n, et telles que, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, l'urne numérotée par k contient k boules blanches et $(n-k)$ boules noires. On choisit au hasard une urne et on en extrait une boule.

1. Déterminer la probabilité d'obtenir une boule blanche.

2. On constate que la boule tirée est blanche. Déterminer la probabilité que cette boule provienne de l'urne numéro 1.

Remarque. La formule des probabilités totales reste valable si $(A_i)_{i\in I}$ est un système presque complet d'évènements. Plus précisément, si $B \in \mathscr{A}$, on a encore les égalités suivantes :

$$P(B) = P\left(\bigcup_{i\in I}(A_i \cap B)\right) = \sum_{i\in I} P(A_i \cap B).$$

En pratique, on fera donc rarement la différence entre système complet d'événements et système presque complet d'événements.