Chapitre 4

Compléments sur les séries réelles

Compétences attendues.

- ✓ Étudier la convergence d'une série et calculer sa somme après avoir explicité sa somme partielle (en particulier dans le cas d'une série télescopique).
- ✓ Étudier la convergence d'une série et calculer sa somme à l'aide des séries usuelles (géométriques ou exponentielle).
- ✓ Utiliser la condition nécessaire de convergence pour justifier qu'une série diverge.
- ✓ Utiliser un critère de comparaison, de négligeabilité ou d'équivalence pour déterminer la nature d'une série à termes positifs.
- ✓ Utiliser les résultats sur les séries absolument convergentes.
- ✓ Utiliser une comparaison entre série et intégrale.

Anthony Mansuy
Professeur de Mathématiques en deuxième année de CPGE filière ECG au Lycée Clemenceau (Reims)
Page personnelle : `http://anthony-mansuy.fr`
E-mail : `mansuy.anthony@hotmail.fr`

1 Généralités

1.1 Définitions et propriétés

Définition.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle.

- On appelle **série de terme général** u_n la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :
$$S_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n = \sum_{k=0}^{n} u_k.$$
On la note $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$, $\displaystyle\sum_{n\geq 0} u_n$ ou $\sum u_n$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, S_n est appelée la **somme partielle d'ordre** n de la série.
- On dit que la série $\sum u_n$ est **convergente** si la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des sommes partielles converge vers une limite finie $S \in \mathbb{R}$ appelée **somme de la série** et on note :
$$S = \lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k.$$
Dans le cas contraire, on dit que la série $\sum u_n$ est **divergente**.

Attention.

Il ne faut pas mélanger les notations :

- $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$: la somme partielle d'ordre n (c'est une somme finie qui existe donc toujours).
- $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$, $\displaystyle\sum_{n\geq 0} u_n$ ou $\sum u_n$: la série de terme général u_n, c'est-à-dire la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des sommes partielles (c'est le nom de la suite sans aucun sens sommatoire).
- $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} u_k$: la somme de la série, c'est-à-dire la limite de la suite des sommes partielles (qui existe seulement si la série converge).

Remarques.

1. Il est possible que la suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ ne soit définie qu'à partir d'un certain rang n_0. Dans ce cas, on change la borne inférieure des sommes partielles que l'on rencontre :
$$\forall n \geq n_0,\ S_n = \sum_{k=n_0}^{n} u_k.$$
2. La nature d'une série ne dépend pas de ses premiers termes : étant donné $n_0 \in \mathbb{N}$,
$$\sum u_n \text{ converge} \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{n\geq n_0} u_n \text{ converge.}$$

Méthode.
Si on est capable de calculer la somme partielle S_n d'une série (c'est en particulier le cas si elle est de type "télescopique"), alors on peut déterminer facilement la nature de la série :

1. *On explicite la somme partielle S_n en fonction de n.*
2. *On détermine $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$:*
    - *Si on obtient une limite finie S, la série converge et sa somme est égale à S.*
    - *Sinon, la série diverge.*

Exercice. Expliciter les sommes partielles d'ordre n de chacune des séries suivantes et en déduire si elles convergent.

1. $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n(n+1)}$

2. $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$

Théorème 1 (Opérations sur les séries convergentes)

(1) Pour tout $\lambda \neq 0$, $\sum u_n$ **converge** si et seulement si $\sum \lambda u_n$ **converge** et on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda u_n = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} u_n.$$

(2) Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont **convergentes**, alors la série $\sum (u_n+v_n)$ **converge** et on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (u_n+v_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \sum_{n=0}^{+\infty} v_n.$$

Attention.

Il est possible que la série $\sum(u_n + v_n)$ converge alors que les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ divergent. **On ne peut donc pas scinder la somme d'une série convergente en deux sommes sans avoir vérifié au préalable que ces deux séries convergent**.

Exemple. On a vu que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n\geq 1}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$ est convergente et on sait que les séries $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}$ et $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n+1}$ sont divergentes (séries de Riemann de paramètre $\alpha = 1$). On ne peut donc pas écrire :

$$\xcancel{\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n} - \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n+1}}.$$

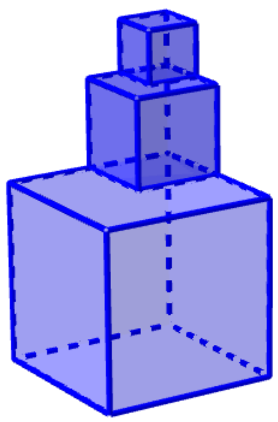
1.2 Séries usuelles

Séries usuelles		Cas de convergence	Somme dans ce cas
Séries géométriques	$\displaystyle\sum_{n\geq p} q^n$	$\lvert q\rvert < 1$	$\displaystyle\sum_{n=p}^{+\infty} q^n = \frac{q^p}{1-q}$
Séries géométriques dérivées d'ordre 1	$\displaystyle\sum_{n\geq 1} nq^{n-1}$	$\lvert q\rvert < 1$	$\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} nq^{n-1} = \frac{1}{(1-q)^2}$
Séries géométriques dérivées d'ordre 2	$\displaystyle\sum_{n\geq 2} n(n-1)q^{n-2}$	$\lvert q\rvert < 1$	$\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)q^{n-2} = \frac{2}{(1-q)^3}$
Séries exponentielles	$\displaystyle\sum_{n\geq 0}\frac{x^n}{n!}$	quelque soit $x \in \mathbb{R}$	$\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n!} = e^x$
Séries de Riemann	$\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^\alpha}$	$\alpha > 1$	

Remarque. Les sommes des séries géométriques dérivées s'obtiennent en dérivant celle de la série géométrique par rapport à q :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} nq^{n-1} = \left(\frac{1}{1-q}\right)' = \frac{1}{(1-q)^2} \quad \text{et} \quad \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)q^{n-2} = \left(\frac{1}{1-q}\right)'' = \frac{2}{(1-q)^3}.$$

Remarque. Sur les séries de Riemann.



Imaginons un empilement de cubes de bois d'arêtes de longueurs $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots$ à l'infini.

Bien que de hauteur infinie (puisque la série harmonique $\sum \frac{1}{n}$ diverge), il ne faudrait qu'une quantité finie de peinture pour recouvrir cette pile (la surface des cubes étant d'aire égale à $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{6}{n^2}$ qui converge), et une quantité finie de bois pour la fabriquer (le volume des cubes étant lui égal à $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^3}$ qui converge aussi).

Les séries de Riemann sont à la base d'une des questions encore ouvertes les plus importantes des mathématiques, l'hypothèse de Riemann. Si les séries de Riemann vous passionnent, si vous voulez devenir riche et célèbre, ce lien pourrait vous y aider.

Méthode.

Pour démontrer la convergence d'une série de type "géométrique" ou "exponentielle" et calculer sa somme, on procèdera ainsi :

1. *On décompose le terme général de la série en somme de termes de la forme q^n, nq^{n-1} et $n(n-1)q^{n-2}$ dans le cas géométrique ou de la forme $\dfrac{x^n}{n!}$ dans le cas exponentielle.*
2. *On justifie la convergence de chacune des séries qui apparaissent puis, par somme, de la série de départ.*
3. *On calcule la somme de la série à l'aide des formules du cours.*

Exercices. Calculer les sommes suivantes après avoir vérifié la convergence des séries :

1. $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{n^2+(-1)^n}{3^n}$

2. $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{n^2+n-2^n}{n!}$

Méthode.

On retiendra que, pour que l'on puisse calculer la somme d'une série, il faut qu'elle soit de type "télescopique", "géométrique" ou "exponentielle".

2 Conditions de convergence

A l'exception des séries de types "géométrique", "exponentielle" ou "télescopique", on ne sait en général pas calculer la somme d'une série. Dans cette partie, on va donner des méthodes permettant de déterminer la nature d'une série même si on ne sait pas calculer sa somme.

2.1 Condition nécessaire

Théorème 2 (Condition nécessaire de convergence)

Pour que la série $\sum u_n$ converge, **il faut que** $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.
Mais **ce n'est pas suffisant !**

Preuve.

□

Remarque. Par contraposition, si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers 0, alors la série $\sum u_n$ diverge. On dit alors qu'elle **diverge grossièrement**.

Exemple. La série $\sum\limits_{n\geq 0}(-1)^n$ diverge grossièrement.

Attention.

La réciproque est **fausse** : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ n'implique pas que $\sum u_n$ converge.
Par exemple, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$ et pourtant $\sum\limits_{n\geq 1}\frac{1}{n}$ diverge (c'est une série de Riemann de paramètre $\alpha = 1$).

2.2 Séries à termes positifs

Les résultats énoncés dans cette partie ne sont valables que pour les séries **à termes positifs**. Ils sont faux si le terme général change de signe.

Étude de la convergence à l'aide d'inégalités

Théorème 3 (Convergence d'une série à termes positifs)

Soit $\sum u_n$ une série à **termes positifs**, c'est-à-dire que $u_n \geq 0$ pour tout entier naturel n.
Dans ces conditions, la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des sommes partielles associée à la série $\sum u_n$ est croissante (car $S_{n+1} - S_n = u_{n+1} \geq 0$) et on a :

- Si $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **majorée**, alors la série $\sum u_n$ **converge**.
- Sinon, $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = +\infty$ et la série **diverge** vers $+\infty$.

Théorème 4 (Comparaison des séries à termes positifs)

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles telles que :

$$0 \leq u_n \leq v_n \quad \text{à partir d'un certain rang } n_0.$$

(1) Si la série $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge aussi et $\displaystyle\sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n \leq \sum_{n=n_0}^{+\infty} v_n$.

(2) Si la série $\sum u_n$ diverge vers $+\infty$, alors $\sum v_n$ diverge aussi vers $+\infty$.

Remarque. La réciproque est fausse :

1. Si la plus petite des deux $\sum u_n$ converge, on ne sait rien sur la plus grande $\sum v_n$.
2. De même, si la plus grande des deux $\sum v_n$ diverge, on ne sait rien sur la plus petite $\sum u_n$.

Méthode.

Pour étudier la nature d'une série $\sum u_n$, on peut majorer u_n par le terme général d'une série usuelle convergente, ou minorer par le terme général d'une série usuelle divergente.

Exercice.

1. Démontrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{2^n}{n! + \ln(n)}$ converge.

2. Démontrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{n+1}{n^2}$ diverge.

Étude de la convergence par domination

Théorème 5 (Convergence par domination des séries à termes positifs)

Soient (u_n) et (v_n) deux suites **à termes positifs** à partir d'un certain rang, telles que $u_n = o(v_n)$.

(1) Si la série $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge.

(2) Si la série $\sum u_n$ diverge, alors $\sum v_n$ diverge.

Preuve.

□

Remarque. La réciproque est fausse :

1. Si la plus petite des deux $\sum u_n$ converge, on ne sait rien sur la plus grande $\sum v_n$.
2. De même, si la plus grande des deux $\sum v_n$ diverge, on ne sait rien sur la plus petite $\sum u_n$.

Méthode.

En pratique, on tente de montrer que le terme général de la série étudiée est négligeable par rapport au terme général d'une série usuelle convergente ou prépondérant par rapport au terme général d'une série usuelle divergente (souvent une série de Riemann).

Exercice.

1. Démontrer que la série $\sum \frac{1}{n^2 \ln(n)}$ converge.

2. Démontrer que la série $\sum \frac{1}{\ln(n)}$ diverge.

Étude de la convergence par équivalence

Théorème 6 (Convergence par équivalence des séries à termes positifs)

Soient (u_n) et (v_n) deux suites **à termes positifs** à partir d'un certain rang, telles que $u_n \sim v_n$. Alors les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature :

(1) Si l'une converge, alors l'autre converge.

(2) Si l'une diverge, alors l'autre diverge.

Preuve.

$\square$

Remarque. Ce théorème est plus fort que les précédents : il suffit de connaître la nature de l'une pour avoir la nature de l'autre. Ceci vient du fait que l'équivalence est symétrique ($u_n \sim v_n \Leftrightarrow v_n \sim u_n$), ce qui n'est pas le cas des inégalités ou de la domination.

Exercice.

1. Démontrer que la série $\sum \ln\left(\dfrac{n^2+1}{n^2-1}\right)$ converge.

2. Démontrer que la série $\sum \dfrac{1}{n+\sqrt{n}}$ diverge.

2.3 Séries absolument convergentes

Définition.

Une série $\sum u_n$ est **absolument convergente** si la série $\sum |u_n|$ converge.

Remarque. L'étude de la convergence absolue d'une série permet de se ramener à une série à termes positifs et de pouvoir ainsi appliquer les résultats du paragraphe précédent.

Théorème 7 (Condition suffisante de convergence)

Si une série converge absolument, **alors** elle converge. De plus, on a :

$$\left|\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n| \qquad \textit{(Inégalité triangulaire).}$$

Exercice. Montrer que la série $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n^2}$ converge.

Attention.

La réciproque de ce théorème est **fausse**.

Par exemple, la série $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ est convergente (voir la séance d'approfondissement 4). Par contre, elle n'est pas absolument convergente car $\left|\frac{(-1)^{n-1}}{n}\right| = \frac{1}{n}$ et $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ est une série divergente.

Propriété 8 (des séries absolument convergentes)

Si une série est absolument convergente, alors on ne change ni sa nature, ni sa somme, en changeant l'ordre de sommation de ses termes.

2.4 Plan d'étude de la nature d'une série

Pour montrer qu'une série $\sum u_n$ converge, on vérifie dans l'ordre :

1. **Si son terme général u_n tend vers 0 :** si ce n'est pas le cas, la série diverge grossièrement et l'étude s'arrête là ;
2. **Si son terme général u_n est de signe constant à partir d'un certain rang :**
   - On le précise dès le début de l'étude : "C'est une série de terme général de signe constant (à partir d'un certain rang)" ;
   - On applique les théorèmes de comparaison/domination/équivalence avec/par des séries usuelles (géométriques, exponentielle, Riemann) ;
3. **Si son terme général est de signe quelconque :**
   - On étudie la convergence absolue de la série ;
   - Si elle n'est pas absolument convergente, l'énoncé nous guidera sur une autre méthode, éventuellement celle détaillée dans la :

☞ **Séance d'approfondissement 4 : Séries alternées.**