Chapitre 5

Variables aléatoires discrètes

Compétences attendues.

- ✓ Vérifier qu'une famille de réels est une loi de probabilité.
- ✓ Déterminer la fonction de répartition d'une variable aléatoire discrète à partir de sa loi et réciproquement.
- ✓ Calculer l'espérance et la variance d'une variable aléatoire discrète.
- ✓ Reconnaitre une loi discrète usuelle à partir d'une expérience aléatoire.
- ✓ Connaitre les différentes caractéristiques des lois discrètes usuelles (support, probabilités, espérance et variance).
- ✓ Savoir retrouver l'expression de l'espérance et de la variance d'une variable aléatoire suivant une loi discrète usuelle.

Anthony Mansuy
Professeur de Mathématiques en deuxième année de CPGE filière ECG au Lycée Clemenceau (Reims)
Page personnelle : `http://anthony-mansuy.fr`
E-mail : `mansuy.anthony@hotmail.fr`

1 Variables aléatoires discrètes

1.1 Définitions

Dans tout ce chapitre, les variables aléatoires sont définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$.

Définition.

- Une **variable aléatoire** sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ est une application

$$X : \left\{ \begin{array}{ccc} \Omega & \to & \mathbb{R} \\ \omega & \mapsto & X(\omega) \end{array} \right.$$

  telle que, pour tout réel x, l'ensemble $\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leq x\}$ est un événement lié à l'expérience aléatoire, c'est-à-dire qu'il appartient à $\mathscr{A}$.

- Le **support** d'une variable aléatoire X, noté $X(\Omega)$, est l'ensemble des valeurs que peut prendre X.
- Une **variable aléatoire** X est **discrète** si son support $X(\Omega)$ est au plus dénombrable.

Propriété 1 (Opérations sur les variables aléatoires discrètes)

(1) Soient X une variable aléatoire discrète sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ et g une application de $X(\Omega)$ dans $\mathbb{R}$. Alors l'application

$$g(X) : \left\{ \begin{array}{ccc} \Omega & \to & \mathbb{R} \\ \omega & \mapsto & g(X(\omega)) \end{array} \right.$$

est une variable aléatoire discrète appelée **transformée** de la variable aléatoire X par g.

(2) Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ et λ un nombre réel.

Alors $X + Y$, λX, XY, $\min(X, Y)$, $\max(X, Y)$ sont aussi des variables aléatoires discrètes.

1.2 Loi d'une variable aléatoire discrète

Définition.

Soit X une variable aléatoire discrète sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ telle que $X(\Omega) = \{x_i \mid i \in I\}$ avec $I \subset \mathbb{N}$.
On appelle **loi de probabilité** de X l'ensemble

$$\{(x_i, p_i) \mid i \in I\}$$

où $p_i = P(X = x_i)$.

Méthode.

Déterminer la loi d'une variable aléatoire discrète X, c'est trouver :

- *le support $X(\Omega)$;*
- *la valeur de $P(X = x_i)$ pour tout $x_i \in X(\Omega)$.*

Exercice. On note X la variable aléatoire égale au nombre de piles obtenus lors de 4 lancers successifs d'une pièce de monnaie équilibrée. Déterminer la loi de X.

Propriété 2 (Système complet d'événements associé à une variable aléatoire discrète)

Soit X est une variable aléatoire discrète sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ de loi $\{(x_i, p_i) \mid i \in I\}$ où $I \subset \mathbb{N}$. Alors :

(1) $(X = x_i)_{i \in I}$ est un système complet d'événements.

(2) En particulier, $\sum_{i \in I} p_i$ converge et vaut 1.

Remarques.

1. A partir d'une variable aléatoire X, on peut donc appliquer la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $(X = x_i)_{i \in I}$ associé à X.
2. L'égalité $\sum_{i \in I} p_i = 1$ permet de vérifier s'il n'y a pas d'erreur dans la loi $\{(x_i, p_i) \mid i \in I\}$ de X.

Propriété 3 (Caractérisation d'une loi de probabilité)

Soit $I \subset \mathbb{N}$. Une famille $(p_i)_{i \in I}$ de réels est une **loi de probabilité** si :

- pour tout $i \in I$, $p_i \geq 0$,
- $\sum_{i \in I} p_i$ converge et vaut 1.

Dans ce cas, il existe un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ et une variable aléatoire discrète X sur cet espace telle que :

$$X(\Omega) = I \quad \text{et} \quad \forall i \in I,\ P(X = i) = p_i.$$

Méthode.

Pour montrer qu'une famille $(p_i)_{i \in I}$ de réels est une loi de probabilité, il faudra vérifier que :

- *si $I = [\![0, n]\!]$,*

  (i) $\forall i \in [\![0, n]\!]$, $p_i \geq 0$,

  (ii) $\sum_{i=0}^{n} p_i = 1$.

- *si $I = \mathbb{N}$,*

  (i) $\forall i \in \mathbb{N}$, $p_i \geq 0$,

  (ii) la série $\sum_{i \geq 0} p_i$ *converge et* $\sum_{i=0}^{+\infty} p_i = 1$.

Exercice. Justifier l'existence d'une variable aléatoire Y satisfaisant $Y(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ P(Y = k) = \frac{1}{k(k+1)}.$$

1.3 Fonction de répartition

Définition.

Soit X une variable aléatoire discrète sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ de loi $\{(x_i, p_i) \mid i \in I\}$ où $I \subset \mathbb{N}$.
On appelle **fonction de répartition** de X la fonction F_X définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F_X(x) = P(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} p_i.$$

Théorème 4 (Propriétés de la fonction de répartition d'une variable aléatoire discrète)

Soit X une variable aléatoire discrète sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ et F_X sa fonction de répartition. Alors :

(1) F_X est croissante sur $\mathbb{R}$;

(2) F_X est en escalier et continue à droite en tout point ;

(3) $\lim\limits_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} F_X(x) = 1$.

Méthode.

La fonction de répartition F_X d'une variable aléatoire discrète X caractérise entièrement sa loi :

- *A partir de la loi $\{(x_i, p_i) \mid i \in I\}$ de X, on peut déterminer F_X :*

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F_X(x) = P(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} p_i.$$

- *A partir de F_X, on peut déterminer la loi de X :*
  - *$X(\Omega)$: c'est l'ensemble (au plus dénombrable) des points x_i de discontinuité de F_X ;*
  - *$P(X = x_i)$ pour tout $x_i \in X(\Omega)$: c'est la hauteur du saut à l'abscisse x_i, c'est-à-dire*

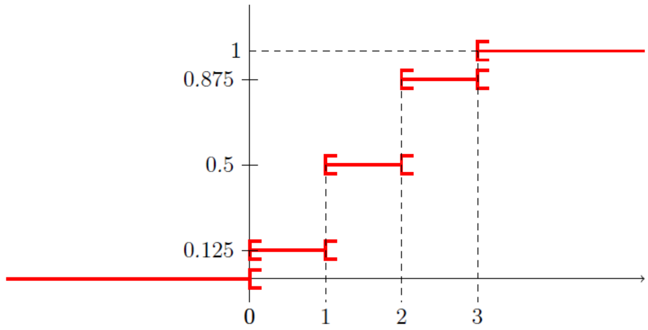
$$\forall i \in I,\ p_i = P(X = x_i) = F_X(x_i) - F_X(x_{i-1})$$

(en supposant que les x_i sont indexés de façon croissante).

Exercice.

1. On considère toujours X la variable aléatoire égale au nombre de piles obtenus lors de 4 lancers successifs d'une pièce de monnaie équilibrée. Tracer sa fonction de répartition.

2. On considère une variable aléatoire Z dont la fonction de répartition est donnée par le graphe suivant :



Déterminer la loi de Z.

2 Moments d'une variable aléatoire discrète

2.1 Espérance d'une variable aléatoire discrète

Définition.

Soit X une variable aléatoire discrète sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ de loi $\{(x_i, p_i) \mid i \in I\}$ où $I \subset \mathbb{N}$.

- On dit que X admet une **espérance** si la série $\sum_{i \in I} x_i p_i$ est **absolument convergente**.
- Dans ce cas, la somme de cette série est appelée l'**espérance** de X et notée $E(X)$:

$$E(X) = \sum_{i \in I} x_i p_i.$$

Interprétation de l'espérance. Lorsqu'elle existe, l'espérance $E(X)$ est la moyenne des valeurs x_i prises par la variable aléatoire X pondérées par les probabilités $p_i = P(X = x_i)$ avec lesquelles X prend ses valeurs. C'est une généralisation de la notion de moyenne.

Exercice. Calculer l'espérance des variables aléatoires X et Y définies précédemment.

Attention.

Les variables aléatoires discrètes finies ont toujours une espérance. Par contre, les variables aléatoires discrètes infinies n'admettent pas forcément d'espérance.

Propriété 5 (de l'espérance)

Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ admettant une espérance et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

(1) **Linéarité** : La variable aléatoire $\lambda X + \mu Y$ admet une espérance et

$$E(\lambda X + \mu Y) = \lambda E(X) + \mu E(Y).$$

(2) **Positivité** : Si $X \geq 0$ presque sûrement, alors $E(X) \geq 0$.

(3) **Croissance** : Si $X \leq Y$ presque sûrement, alors $E(X) \leq E(Y)$.

Théorème 6 (de transfert)

Soit X une variable aléatoire discrète sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ de loi $\{(x_i, p_i) \mid i \in I\}$ où $I \subset \mathbb{N}$ et g une application de $X(\Omega)$ dans $\mathbb{R}$.

- Si X est une variable aléatoire discrète **finie** :
  La variable aléatoire discrète $g(X)$ admet une espérance, et on a :
  $$E(g(X)) = \sum_{i \in I} g(x_i) p_i \qquad \text{(somme finie).}$$
- Si X est une variable aléatoire discrète **infinie** :
  La variable aléatoire discrète $g(X)$ admet une espérance si et seulement si la série $\sum_{i \in I} g(x_i) p_i$ est **absolument convergente**. Dans ce cas, on a :
  $$E(g(X)) = \sum_{i \in I} g(x_i) p_i \qquad \text{(somme d'une série absolument convergente).}$$

Méthode.

Le théorème de transfert permet de calculer l'espérance de $g(X)$ en ne connaissant que la loi de X.

Propriété 7 (de l'espérance)

Soit X une variable aléatoire discrète sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ **admettant une espérance** et a et b deux réels. Alors la variable aléatoire $aX + b$ **admet une espérance** et

$$E(aX + b) = aE(X) + b.$$

Preuve.

$\square$

2.2 Variance d'une variable aléatoire discrète

Définition.

Soit X une variable aléatoire discrète sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ de loi $\{(x_i, p_i) \mid i \in I\}$ où $I \subset \mathbb{N}$ et $r \in \mathbb{N}^*$.

- On dit que X admet un **moment d'ordre** r si X^r possède une espérance. Par le théorème de transfert, c'est le cas si et seulement si la série $\sum_{i \in I} x_i^r p_i$ est **absolument convergente**.
- Dans ce cas, la somme de cette série est appelée le **moment d'ordre** r de X et notée $m_r(X)$:

$$m_r(X) = E(X^r) = \sum_{i \in I} x_i^r p_i$$

Propriété 8 (Moments d'une variable aléatoire discrète)

Soit X est une variable aléatoire discrète sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$.

(1) Si X admet un moment d'ordre r, alors elle admet un moment de tout ordre $s \leq r$.

(2) En particulier, si X admet un moment d'ordre 2, alors X admet une espérance.

Définition.

Soit X est une variable aléatoire discrète sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ de loi $\{(x_i, p_i) \mid i \in I\}$ où $I \subset \mathbb{N}$. On suppose que X admet une espérance.

- On dit que X admet une **variance** si $X - E(X)$ admet un moment d'ordre 2. Par le théorème de transfert, c'est le cas si et seulement si la série $\sum_{i \in I} (x_i - E(X))^2 p_i$ est **absolument convergente**.
- Dans ce cas, la somme de cette série est appelée la **variance** de X et notée $V(X)$:

$$V(X) = E((X - E(X))^2) = \sum_{i \in I} (x_i - E(X))^2 p_i.$$

Interprétation de la variance. La variance d'une variable aléatoire discrète X mesure la dispersion des valeurs prises par X par rapport à $E(X)$.

Remarque. Puisque $(X - E(X))^2 \geq 0$, on a par positivité de l'espérance :

$$V(X) = E((X - E(X))^2) \geq 0.$$

Définition.

Soit X une variable aléatoire discrète sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ admettant une variance. On appelle **écart type** de X le réel noté $\sigma(X)$ et défini par :

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}.$$

Théorème 9 (Formule de Koenig-Huygens)

Soit X une variable aléatoire discrète sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$.
X admet une **variance** si et seulement si X admet un **moment d'ordre** 2, et dans ce cas on a :

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2.$$

Preuve.

□

Méthode.

Dans la quasi-totalité des cas, on utilise la formule de Koenig-Huygens pour calculer une variance et non la définition de base qui entraîne des calculs compliqués.

Exercice. Calculer la variance des variables aléatoires X et Y définies précédemment.

Propriété 10 (de la variance)

Soit X est une variable aléatoire discrète sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ **admettant une variance** et a, b deux réels. Alors la variable aléatoire $aX + b$ **admet une variance** et :

$$V(aX + b) = a^2 V(X).$$

Preuve.

□

3 Lois discrètes usuelles

3.1 Lois discrètes finies

Loi certaine

Définition.

Soit X une variable aléatoire discrète. On dit que :

- X est **certaine** si X ne prend qu'une seule valeur a. Dans ce cas, $X(\Omega) = \{a\}$ et $P(X = a) = 1$.
- X est **quasi-certaine** s'il existe $a \in X(\Omega)$ tel que $P(X = a) = 1$.

Propriété 11 (Espérance et variance d'une variable aléatoire certaine ou quasi-certaine)

Soit X une variable aléatoire discrète.

(1) Si X est **certaine** telle que $X(\Omega) = \{a\}$, alors $E(X) = a$ et $V(X) = 0$.

(2) Si X est **quasi-certaine** telle que $P(X = a) = 1$, alors $E(X) = a$ et $V(X) = 0$.

(3) Si $V(X) = 0$, alors X est **quasi-certaine** et **presque sûrement** égale à $E(X)$.

Loi uniforme

Définition.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une variable aléatoire X suit une **loi uniforme** sur $[\![1,n]\!]$ si :

$$X(\Omega) = [\![1,n]\!] \qquad \text{et} \qquad \forall k \in [\![1,n]\!],\ P(X=k) = \frac{1}{n}.$$

On notera $X \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1,n]\!])$ si X suit une loi uniforme sur $[\![1,n]\!]$.

Situation type. Elle apparait lorsqu'il y a **équiprobabilité**. Une variable aléatoire X suit une loi uniforme sur $[\![1,n]\!]$ lorsque X prend chacune des valeurs $1, 2, \dots, n$ avec la même probabilité.

Propriété 12 (Espérance et variance d'une variable aléatoire suivant une loi uniforme)

Soit X une variable aléatoire suivant une **loi uniforme** $\mathcal{U}([\![1,n]\!])$. Alors X possède une espérance et une variance données par :

$$E(X) = \frac{n+1}{2} \qquad \text{et} \qquad V(X) = \frac{n^2-1}{12}.$$

Preuve. Soit X une variable aléatoire suivant une loi uniforme $\mathcal{U}([\![1,n]\!])$. Comme X est à support fini, elle admet une espérance et une variance.

- Pour l'espérance :

$$E(X) = \sum_{k=1}^{n} kP(X=k) = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{n} \times \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n+1}{2}.$$

- Pour le moment d'ordre 2 (en utilisant le théorème de transfert) :

$$E(X^2) = \sum_{k=1}^{n} k^2 P(X=k) = \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{n} \times \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{(n+1)(2n+1)}{6}.$$

- Avec la formule de Koenig-Huygens :

$$\begin{aligned} V(X) &= E(X^2) - E(X)^2 = \frac{(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{(n+1)^2}{4} = \frac{2(n+1)(2n+1) - 3(n+1)^2}{12} \\ &= \frac{(n+1)\left(2(2n+1) - 3(n+1)\right)}{12} = \frac{(n+1)(n-1)}{12} = \frac{n^2-1}{12}. \end{aligned}$$

□

On peut généraliser la notion de loi uniforme à un intervalle $[\![a,b]\!]$ quelconque :

Définition.

Soient a et b deux entiers tels que $a < b$. Une variable aléatoire X suit une **loi uniforme** sur $[\![a,b]\!]$ si :

$$X(\Omega) = [\![a,b]\!] \qquad \text{et} \qquad \forall k \in [\![a,b]\!],\ P(X=k) = \frac{1}{b-a+1}.$$

On notera $X \hookrightarrow \mathcal{U}([\![a,b]\!])$ si X suit une loi uniforme sur $[\![a,b]\!]$.

Propriété 13 (Loi uniforme sur un intervalle entier quelconque)

Soient a et b deux entiers tels que $a < b$ et X une variable aléatoire suivant une **loi uniforme** $\mathcal{U}([\![a,b]\!])$. Alors X possède une espérance et une variance données par :

$$E(X) = \frac{a+b}{2} \qquad \text{et} \qquad V(X) = \frac{(b-a+1)^2-1}{12}.$$

Simulation informatique. Après avoir importé la librairie `numpy.random` avec le raccourci `rd`, la commande :

- `rd.randint(a, b+1)` retourne un nombre choisi aléatoirement suivant la loi uniforme $\mathcal{U}([\![a, b]\!])$;
- `rd.randint(a, b+1, r)` retourne un vecteur de taille r dont les coefficients sont choisis aléatoirement suivant la loi uniforme $\mathcal{U}([\![a, b]\!])$;
- `rd.randint(a, b+1, [r, s])` retourne une matrice de taille $r \times s$ dont les coefficients sont choisis aléatoirement suivant la loi uniforme $\mathcal{U}([\![a, b]\!])$.

Loi de Bernoulli

Définition.

Une variable aléatoire X suit une **loi de Bernoulli** de paramètre $p \in]0, 1[$ si :

$$X(\Omega) = \{0, 1\} \qquad \text{et} \qquad P(X = 1) = p, \ P(X = 0) = 1 - p.$$

On notera $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$ si X suit une loi de Bernoulli de paramètre p.

Situation type. Une épreuve de Bernoulli de paramètre p est une expérience aléatoire à deux issues succès (de probabilité p) ou échec (de probabilité $1 - p$). Une variable aléatoire X suit une loi de Bernoulli de paramètre p si, lors d'une épreuve de Bernoulli de paramètre p, $X = 1$ si il a un succès et $X = 0$ si il a un échec.

Propriété 14 (Espérance et variance d'une variable aléatoire suivant une loi de Bernoulli)

Soit X une variable aléatoire suivant une **loi de Bernoulli** de paramètre $p \in]0, 1[$. Alors X possède une espérance et une variance données par :

$$E(X) = p \qquad \text{et} \qquad V(X) = p(1 - p).$$

Preuve. Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0, 1[$. Comme X est à support fini, elle admet une espérance et une variance.

- Pour l'espérance :
$$E(X) = 0 \times P(X = 0) + 1 \times P(X = 1) = p.$$
- Pour le moment d'ordre 2 (en utilisant le théorème de transfert) :
$$E(X^2) = 0^2 \times P(X = 0) + 1^2 \times P(X = 1) = p.$$
- Avec la formule de Koenig-Huygens :
$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = p - p^2 = p(1 - p).$$

□

Simulation informatique. Après avoir importé la librairie `numpy.random` avec le raccourci `rd`, la commande :

- `rd.binomial(1, p)` retourne un nombre choisi aléatoirement suivant la loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$;
- `rd.binomial(1, p, r)` retourne un vecteur de taille r dont les coefficients sont choisis aléatoirement suivant la loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$;
- `rd.binomial(1, p, [r, s])` retourne une matrice de taille $r \times s$ dont les coefficients sont choisis aléatoirement suivant la loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$.

Loi binomiale

Définition.

Une variable aléatoire X suit une **loi binomiale** de paramètres $n \in \mathbb{N}$ et $p \in]0,1[$ si :

$$X(\Omega) = [\![0,n]\!] \qquad \text{et} \qquad \forall k \in [\![0,n]\!],\ P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

On notera $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$ si X suit une loi binomiale de paramètres n et p.

Situation type. Si on effectue un nombre **défini** n de répétitions **indépendantes** de la même épreuve de Bernoulli de paramètre p, alors la variable aléatoire X égale au **nombre de succès** au cours de ces n répétitions suit une loi binomiale de paramètres n et p.

Propriété 15 (Espérance et variance d'une variable aléatoire suivant une loi binomiale)

Soit X une variable aléatoire suivant une **loi binomiale** de paramètres $n \in \mathbb{N}$ et $p \in]0,1[$. Alors X possède une espérance et une variance données par :

$$E(X) = np \qquad \text{et} \qquad V(X) = np(1-p).$$

Preuve. Soit X une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres $n \in \mathbb{N}$ et $p \in]0,1[$. Comme X est à support fini, elle admet une espérance et une variance.

- Pour l'espérance : Remarquons d'abord que pour tout $k \neq 0$,

$$k\binom{n}{k} = k \times \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} = \frac{n(n-1)!}{(k-1)!((n-1)-(k-1))!} = n\binom{n-1}{k-1}.$$

On a alors :

$$\begin{aligned}
E(X) &= \sum_{k=0}^{n} kP(X=k) = \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \\
&= \sum_{k=1}^{n} n\binom{n-1}{k-1} p^k (1-p)^{n-k} = np\sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} p^{k-1}(1-p)^{(n-1)-(k-1)} \\
&= np\sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} p^i (1-p)^{n-1-i} \quad \text{(en posant } i = k-1\text{)} \\
&= np(p+(1-p))^{n-1} \quad \text{(avec la formule du binôme de Newton)} \\
&= np.
\end{aligned}$$

- Pour le moment d'ordre 2 : Remarquons d'abord que pour tout $k \neq 0, 1$,

$$k(k-1)\binom{n}{k} = k(k-1) \times \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{(k-2)!(n-k)!} = \frac{n(n-1)(n-2)!}{(k-2)!((n-2)-(k-2))!} = n(n-1)\binom{n-2}{k-2}.$$

On a alors (en utilisant le théorème de transfert) :

$$\begin{aligned}
E(X^2) &= \sum_{k=0}^{n} k^2 P(X=k) = \sum_{k=0}^{n} k(k-1)P(X=k) + \sum_{k=0}^{n} kP(X=k) \\
&= \sum_{k=2}^{n} k(k-1)\binom{n}{k} p^k(1-p)^{n-k} + \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \\
&= \sum_{k=2}^{n} n(n-1)\binom{n-2}{k-2} p^k (1-p)^{n-k} + \sum_{k=1}^{n} n\binom{n-1}{k-1} p^k (1-p)^{n-k} \\
&= n(n-1)p^2 \sum_{k=2}^{n} \binom{n-2}{k-2} p^{k-2}(1-p)^{(n-2)-(k-2)} + np\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1} p^{k-1}(1-p)^{(n-1)-(k-1)}
\end{aligned}$$

En posant $j = k-2$ dans la première somme et $i = k-1$ dans la deuxième, on obtient :

$$\begin{aligned} E(X^2) &= n(n-1)p^2 \sum_{j=0}^{n-2} \binom{n-2}{j} p^j (1-p)^{n-2-j} + np \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} p^i (1-p)^{n-1-i} \\ &= n(n-1)p^2 (p+(1-p))^{n-2} + np(p+(1-p))^{n-1} \quad \text{(avec la formule du binôme de Newton)} \\ &= n(n-1)p^2 + np. \end{aligned}$$

- Avec la formule de Koenig-Huygens :

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = n(n-1)p^2 + np - (np)^2 = n^2p^2 - np^2 + np - n^2p^2 = np(1-p).$$

□

Simulation informatique. Après avoir importé la librairie `numpy.random` avec le raccourci `rd`, la commande :

- `rd.binomial(n, p)` retourne un nombre choisi aléatoirement suivant la loi binomial $\mathcal{B}(n,p)$;
- `rd.binomial(n, p, r)` retourne un vecteur de taille r dont les coefficients sont choisis aléatoirement suivant la loi binomial $\mathcal{B}(n,p)$;
- `rd.binomial(n, p, [r, s])` retourne une matrice de taille $r \times s$ dont les coefficients sont choisis aléatoirement suivant la loi binomial $\mathcal{B}(n,p)$.

3.2 Lois discrètes infinies

Loi géométrique

Définition.

Une variable aléatoire X suit une **loi géométrique** de paramètre $p \in]0,1[$ si :

$$X(\Omega) = \mathbb{N}^* \qquad \text{et} \qquad \forall k \in \mathbb{N}^*,\ P(X=k) = (1-p)^{k-1}p.$$

On notera $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$ si X suit une loi géométrique de paramètre p.

Situation type. Si on effectue un nombre **indéfini** de répétitions **indépendantes** de la même épreuve de Bernoulli de paramètre p, alors la variable aléatoire X égale au **rang d'apparition du premier succès** suit une loi géométrique de paramètre p.

Propriété 16 (Espérance et variance d'une variable aléatoire suivant une loi géométrique)

Soit X une variable aléatoire suivant une **loi géométrique** de paramètre $p \in]0,1[$. Alors X possède une espérance et une variance données par :

$$E(X) = \frac{1}{p} \qquad \text{et} \qquad V(X) = \frac{1-p}{p^2}.$$

Preuve. Soit X une variable aléatoire suivant une loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$.

- Pour l'espérance : X admet une espérance si la série $\sum_{k\geq 1} kP(X=k)$ converge absolument.

$$|kP(X=k)| = kP(X=k) = k \times (1-p)^{k-1}p = p \times k(1-p)^{k-1}.$$

La série $\sum_{k\geq 1} k(1-p)^{k-1}$ converge car c'est une série géométrique dérivée d'ordre 1 de raison $(1-p) \in]0,1[$.
Donc X admet une espérance et on a :

$$E(X) = \sum_{k=1}^{+\infty} kP(X=k) = p\sum_{k=1}^{+\infty} k(1-p)^{k-1} = p \times \frac{1}{(1-(1-p))^2} = \frac{p}{p^2} = \frac{1}{p}.$$

- Pour le moment d'ordre 2 : X admet un moment d'ordre 2 si la série $\sum_{k\geq 1} k^2P(X=k)$ converge absolument.

$$\left|k^2P(X=k)\right| = k(k-1)P(X=k)+kP(X=k) = (1-p)p\times k(k-1)(1-p)^{k-2}+p\times k(1-p)^{k-1}.$$

La série $\sum_{k\geq 2} k(k-1)(1-p)^{k-2}$ converge car c'est une série géométrique dérivée d'ordre 2 de raison $(1-p)\in]0,1[$.

La série $\sum_{k\geq 1} k(1-p)^{k-1}$ converge car c'est une série géométrique dérivée d'ordre 1 de raison $(1-p)\in]0,1[$.

Par somme, X admet un moment d'ordre 2 et on a avec le théorème de transfert :

$$\begin{aligned} E(X^2) &= \sum_{k=1}^{+\infty} k^2P(X=k) = (1-p)p\times\sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)(1-p)^{k-2}+p\times\sum_{k=1}^{+\infty} k(1-p)^{k-1} \\ &= (1-p)p\times\frac{2}{(1-(1-p))^3}+p\times\frac{1}{(1-(1-p))^2} = \frac{2(1-p)}{p^2}+\frac{1}{p} = \frac{2-p}{p^2}. \end{aligned}$$

- Comme X admet un moment d'ordre 2, elle admet une variance et on a avec la formule de Koenig-Huygens :

$$V(X) = E(X^2)-E(X)^2 = \frac{2-p}{p^2}-\frac{1}{p^2} = \frac{1-p}{p^2}.$$

□

Simulation informatique. Après avoir importé la librairie `numpy.random` avec le raccourci `rd`, la commande :

- `rd.geometric(p)` retourne un nombre choisi aléatoirement suivant la loi géométrique $\mathcal{G}(p)$;
- `rd.geometric(p, r)` retourne un vecteur de taille r dont les coefficients sont choisis aléatoirement suivant la loi géométrique $\mathcal{G}(p)$;
- `rd.geometric(p, [r, s])` retourne une matrice de taille $r\times s$ dont les coefficients sont choisis aléatoirement suivant la loi géométrique $\mathcal{G}(p)$.

Loi de Poisson

Définition.

Une variable aléatoire X suit une **loi de Poisson** de paramètre $\lambda\in]0,+\infty[$ si :

$$X(\Omega)=\mathbb{N} \qquad \text{et} \qquad \forall k\in\mathbb{N},\ P(X=k) = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}.$$

On notera $X\hookrightarrow\mathcal{P}(\lambda)$ si X suit la loi de Poisson de paramètre λ.

Situation type. La loi de Poisson ne correspond à aucune situation type. Elle apparait comme la limite d'une certaine suite de variables aléatoires suivant une loi binomiale. Elle se rencontre lorsque la réalisation d'un évènement est rare sur un grand nombre d'observations. Lorsqu'il faut l'utiliser, l'énoncé l'indique explicitement.

Propriété 17 (Espérance et variance d'une variable aléatoire suivant une loi de Poisson)

Soit X une variable aléatoire suivant une **loi de Poison** de paramètre $\lambda\in]0,+\infty[$. Alors X possède une espérance et une variance données par :

$$E(X)=\lambda \qquad \text{et} \qquad V(X)=\lambda.$$

Preuve. Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda\in]0,+\infty[$.

- Pour l'espérance : X admet une espérance si la série $\sum_{k\geq 0} kP(X=k)$ converge absolument. Si $k\neq 0$,

$$|kP(X=k)| = kP(X=k) = k\times\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} = \lambda e^{-\lambda}\times\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}.$$

La série $\displaystyle\sum_{k\geq 1} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}$ converge car c'est une série exponentielle. Donc X admet une espérance et on a :

$$E(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} kP(X=k) = \lambda e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \lambda e^{-\lambda} \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{\lambda^i}{i!} = \lambda e^{-\lambda} \times e^{\lambda} = \lambda.$$

- Pour le moment d'ordre 2 : X admet un moment d'ordre 2 si la série $\displaystyle\sum_{k\geq 0} k^2 P(X=k)$ converge absolument.

  Si $k \neq 0, 1$,

$$\begin{aligned} \left|k^2 P(X=k)\right| &= k(k-1)P(X=k) + kP(X=k) = k(k-1)\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} + k\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} \\ &= \lambda^2 e^{-\lambda} \times \frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!} + \lambda e^{-\lambda} \times \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}. \end{aligned}$$

  Les séries $\displaystyle\sum_{k\geq 2} \frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!}$ et $\displaystyle\sum_{k\geq 1} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}$ convergent car ce sont des séries exponentielles.

  Par somme, X admet un moment d'ordre 2 et on a avec le théorème de transfert :

$$\begin{aligned} E(X^2) &= \sum_{k=0}^{+\infty} k^2 P(X=k) = \sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)P(X=k) + \sum_{k=1}^{+\infty} kP(X=k) \\ &= \lambda^2 e^{-\lambda} \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!} + \lambda e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \lambda^2 e^{-\lambda} \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{\lambda^j}{j!} + \lambda e^{-\lambda} \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{\lambda^i}{i!} \\ &= \lambda^2 e^{-\lambda} \times e^{\lambda} + \lambda e^{-\lambda} \times e^{\lambda} = \lambda^2 + \lambda. \end{aligned}$$

- Comme X admet un moment d'ordre 2, elle admet une variance et on a avec la formule de Koenig-Huygens :

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda.$$

□

Simulation informatique. Après avoir importé la librairie `numpy.random` avec le raccourci `rd`, la commande :

- `rd.poisson(lambda)` retourne un nombre choisi aléatoirement suivant la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$;
- `rd.poisson(lambda, r)` retourne un vecteur de taille r dont les coefficients sont choisis aléatoirement suivant la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$;
- `rd.poisson(lambda, [r, s])` retourne une matrice de taille $r \times s$ dont les coefficients sont choisis aléatoirement suivant la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$.

3.3 Tableau des lois discrètes usuelles

	Dénomination	Notation	Paramètres	Support	Probabilités	Espérance	Variance
Lois finies	Loi uniforme	$\mathcal{U}(\llbracket 1, n \rrbracket)$	$n \in \mathbb{N}^*$	$\llbracket 1, n \rrbracket$	$P(X = k) = \frac{1}{n}$	$\frac{n+1}{2}$	$\frac{n^2-1}{12}$
		$\mathcal{U}(\llbracket a, b \rrbracket)$	$a, b \in \mathbb{N}^*,\ a \leq b$	$\llbracket a, b \rrbracket$	$P(X = k) = \frac{1}{b-a+1}$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)(b-a+2)}{12}$
	Loi de Bernoulli	$\mathcal{B}(p)$	$p \in]0, 1[$	$\{0, 1\}$	$P(X = 1) = p$ $P(X = 0) = 1 - p$	p	$p(1-p)$
	Loi binomiale	$\mathcal{B}(n, p)$	$n \in \mathbb{N}^*$, $p \in]0, 1[$	$\llbracket 0, n \rrbracket$	$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$	np	$np(1-p)$
Lois infinies	Loi géométrique	$\mathcal{G}(p)$	$p \in]0, 1[$	$\mathbb{N}^*$	$P(X = k) = (1-p)^{k-1} p$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$
	Loi de Poisson	$\mathcal{P}(\lambda)$	$\lambda > 0$	$\mathbb{N}$	$P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$	λ	λ