Chapitre 6

Étude locale de fonctions

Compétences attendues.

- ✓ Savoir montrer qu'une fonction est négligeable devant une autre.
- ✓ Savoir trouver un équivalent à l'aide des opérations usuelles ou des équivalents classiques.
- ✓ Connaître les développements limités usuels.
- ✓ Savoir calculer un développement limité.
- ✓ Utiliser les développements limités pour trouver un équivalent ou une limite.
- ✓ Utiliser les développements limités pour obtenir l'équation d'une tangente.
- ✓ Utiliser les développements limités pour obtenir l'équation d'une asymptote.

Anthony Mansuy
Professeur de Mathématiques en deuxième année de CPGE filière ECG au Lycée Clemenceau (Reims)
Page personnelle : `http://anthony-mansuy.fr`
E-mail : `mansuy.anthony@hotmail.fr`

1 Comparaison de fonctions au voisinage d'un point

Dans toute cette partie :

- I désignera un intervalle réel non vide et non réduit à un point, x_0 un point ou une extrémité de I (éventuellement $\pm\infty$), $\mathscr{D}$ désignera I ou $I \setminus \{x_0\}$;
- toutes les fonctions considérées seront définies sur $\mathscr{D}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, et supposées non nulles sur $I \setminus \{x_0\}$ (de sorte que le quotient de deux fonctions est toujours bien défini sur $I \setminus \{x_0\}$).

1.1 Négligeabilité au voisinage d'un point

Définition.

Soient f et $g : \mathscr{D} \to \mathbb{R}$.
On dit que f est **négligeable devant** g **au voisinage de** x_0 et on note $f(x) \underset{x\to x_0}{=} o(g(x))$, s'il existe une fonction $\varepsilon : \mathscr{D} \to \mathbb{R}$ telle que $\lim\limits_{x\to x_0} \varepsilon(x) = 0$ et pour tout $x \in \mathscr{D}$, $f(x) = \varepsilon(x)g(x)$. Ceci est équivalent à $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$. Autrement dit :

$$f(x) \underset{x\to x_0}{=} o(g(x)) \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

Exemple. $x \underset{x\to+\infty}{=} o(x^2)$ car $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$ et $x^2 \underset{x\to 0}{=} o(x)$ car $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2}{x} = \lim\limits_{x\to 0} x = 0$.

Remarques.

1. Si $f(x) \underset{x\to x_0}{=} o(g(x))$, on dit que g est **prépondérante** sur f au voisinage de x_0. Cette définition donne un cadre rigoureux à la notion de "terme prépondérant" dans une somme.
2. On a : $f(x) \underset{x\to x_0}{=} o(1) \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{1} = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$.

Attention.

La notation $o(h(x))$ ne désigne pas une fonction particulière mais toute fonction possédant la propriété d'être négligeable devant h au voisinage de x_0. Ainsi, $f(x) \underset{x\to x_0}{=} o(h(x))$ n'est pas une vraie égalité. Si $f(x) \underset{x\to x_0}{=} o(h(x))$ et $g(x) \underset{x\to x_0}{=} o(h(x))$, on n'a pas nécessairement $f = g$ (même au voisinage de x_0).

Propriété 1 (Comparaison des fonctions puissances)

(1) Au voisinage de $\pm\infty$, la plus **petite** puissance positive est **négligeable** par rapport à la plus grande puissance positive :

$$0 \leq \alpha < \beta \quad \Rightarrow \quad x^\alpha \underset{x\to\pm\infty}{=} o(x^\beta).$$

(2) Au voisinage de 0, la plus **grande** puissance positive de x est **négligeable** par rapport à la plus petite puissance positive :

$$0 \leq \alpha < \beta \quad \Rightarrow \quad x^\beta \underset{x\to 0}{=} o(x^\alpha).$$

Théorème 2 (Croissances comparées)

Soit $(\alpha, \beta) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$. On a :

$$(\ln(x))^\beta \underset{x\to+\infty}{=} o(x^\alpha), \quad x^\alpha \underset{x\to+\infty}{=} o(e^{\alpha x}), \quad |\ln(x)|^\beta \underset{x\to 0}{=} o\left(\frac{1}{x^\alpha}\right), \quad e^{\beta x} \underset{x\to-\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^\alpha}\right).$$

Propriété 3 (Règles de calculs sur les petits-o)

Soient f, g et $h : \mathscr{D} \to \mathbb{R}$.

(1) Si $f(x) \underset{x\to x_0}{=} o(h(x))$ et $g(x) \underset{x\to x_0}{=} o(h(x))$ alors : $\forall(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$, $\lambda f(x) + \mu g(x) \underset{x\to x_0}{=} o(h(x))$.

(2) Si $f(x) \underset{x\to x_0}{=} o(g(x))$, alors $f(x)h(x) \underset{x\to x_0}{=} o(g(x)h(x))$.

(3) Si $f(x) \underset{x\to x_0}{=} o(g(x))$ et $g(x) \underset{x\to x_0}{=} o(h(x))$ alors $f(x) \underset{x\to x_0}{=} o(h(x))$.

1.2 Équivalence au voisinage d'un point

Définition.

Soient f et $g : \mathscr{D} \to \mathbb{R}$.
On dit que f est **équivalente à** g **au voisinage de** x_0 et on note $f(x) \underset{x\to x_0}{\sim} g(x)$, s'il existe une fonction $\alpha : \mathscr{D} \to \mathbb{R}$ telle que $\lim\limits_{x\to x_0} \alpha(x) = 1$ et pour tout $x \in \mathscr{D}$, $f(x) = \alpha(x)g(x)$. Ceci est équivalent à $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$.
Autrement dit :

$$f(x) \underset{x\to x_0}{\sim} g(x) \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

Remarques.

1. Si $f(x) \underset{x\to x_0}{\sim} g(x)$, alors $g(x) \underset{x\to x_0}{\sim} f(x)$.

   On dira donc simplement que f et g sont équivalentes au voisinage de x_0.

2. Si $f(x) \underset{x\to x_0}{\sim} g(x)$ et $g(x) \underset{x\to x_0}{\sim} h(x)$, alors $f(x) \underset{x\to x_0}{\sim} h(x)$.

Propriété 4 (Comparaison des fonctions polynomiales)

Si $P : x \in \mathbb{R} \mapsto a_p x^p + a_{p-1}x^{p-1} + \ldots + a_q x^q$ (où $p \geq q$, $a_p \neq 0$ et $a_q \neq 0$) est une fonction polynomiale, alors :

$$P(x) \underset{x\to\pm\infty}{\sim} a_p x^p \quad \text{et} \quad P(x) \underset{x\to 0}{\sim} a_q x^q.$$

Autrement dit, une fonction polynômiale est équivalente à son monôme de plus haut degré au voisinage de $\pm\infty$ et à son monôme de plus bas degré au voisinage de 0.

Exemple. $2x^3 + x^2 - 3x \underset{x\to+\infty}{\sim} 2x^3$ et $2x^3 + x^2 - 3x \underset{x\to 0}{\sim} -3x$.

Propriété 5 (Équivalents usuels au voisinage de 0)

- $e^x - 1 \underset{x\to 0}{\sim} x$,
- $\ln(1+x) \underset{x\to 0}{\sim} x$,
- $(1+x)^\alpha - 1 \underset{x\to 0}{\sim} \alpha x$ pour $\alpha \neq 0$.

Propriété 6 (Caractérisation de l'équivalence par les petits-o)

Soient f et $g : \mathscr{D} \to \mathbb{R}$. On a :

$$f(x) \underset{x\to x_0}{\sim} g(x) \qquad \Leftrightarrow \qquad f(x) \underset{x\to x_0}{=} g(x) + o(g(x)).$$

Remarque. La réciproque indique qu'on peut négliger les termes négligeables dans une somme :

$$f(x) + o(f(x)) \underset{x\to x_0}{\sim} f(x).$$

Propriété 7 (Opérations sur les équivalents)

Soient f, g, h, i quatre fonctions définies sur $\mathscr{D}$. Si $f(x) \underset{x \to x_0}{\sim} g(x)$ et si $h(x) \underset{x \to x_0}{\sim} i(x)$, alors :

- $f(x)h(x) \underset{x \to x_0}{\sim} g(x)i(x)$;
- $\dfrac{f(x)}{h(x)} \underset{x \to x_0}{\sim} \dfrac{g(x)}{i(x)}$;
- pour tout $k \in \mathbb{N}$ **fixé**, $(f(x))^k \underset{x \to x_0}{\sim} (g(x))^k$;
- pour $\alpha \in \mathbb{R}$ **fixé** et si f^α et g^α sont bien définies sur $\mathscr{D}$, alors $(f(x))^\alpha \underset{x \to x_0}{\sim} (g(x))^\alpha$.

Attention.

Ce sont les seules opérations autorisées pour les équivalents. Ainsi :

- On ne simplifie jamais une constante dans un équivalent.
- $\sim$ n'est pas compatible avec la somme.
- $\sim$ n'est pas compatible avec la composition par la fonction exponentielle.
- $\sim$ n'est pas compatible avec la composition par la fonction logarithme.

Remarque. Un moyen mnémotechnique pour se rappeler des opérations autorisées ou non est de remarquer que :

- $1 \times 1 = 1$, $\dfrac{1}{1} = 1$ et $1^\alpha = 1$, ce qui assure que les équivalents passent bien au produit, au quotient et à une puissance α ;
- $1 + 1 = 2 \neq 1$, $\ln(1) = 0 \neq 1$ et $e^1 = e \neq 1$, ce qui confirme que les équivalents sont incompatibles avec la somme et la composition par exp ou ln.

Si vous avez le moindre doute sur un équivalent, faites le quotient (éventuellement au brouillon) et vérifiez qu'il tend bien vers 1 !

Exercice. Déterminer un équivalent de $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{(x^2 - x)\ln(1 + x)}$ en 0 et en $+\infty$.

Propriété 8 (Signe au voisinage d'un point)

Si $f(x) \underset{x \to x_0}{\sim} g(x)$, alors f et g sont de même signe au voisinage de x_0.

Théorème 9 (Équivalents et limites)

(1) Si $f(x)$ converge vers une limite finie ℓ **non nulle** lorsque x tend vers x_0, alors $f(x) \underset{x \to x_0}{\sim} \ell$.

(2) Si $f(x) \underset{x \to x_0}{\sim} g(x)$ et si $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \ell$ ($\ell \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$), alors $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$.

Méthode.
Pour obtenir la limite d'une fonction f en x_0, on pourra :

1. *Déterminer un équivalent en x_0 de chacun des facteurs apparaissant dans $f(x)$.*
2. *Utiliser les opérations sur les équivalents pour obtenir un équivalent en x_0 de $f(x)$.*
3. *Calculer la limite de l'équivalent obtenu en x_0 et en déduire la limite de f en x_0.*

Exercice. Déterminer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\sqrt{x^2+x}}{x^4+3x^2}$

2. $\lim\limits_{x \to +\infty} x \ln\left(1 + \dfrac{1}{x^2}\right)$

3. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1-e^{x^2}}{x\ln(1-x)}$

4. $\lim\limits_{x \to 0} (1+x)^{1/x}$

2 Développement limité au voisinage d'un point

Dans toute la suite :

- I désignera un intervalle réel non vide et non réduit à un point, x_0 un élément ou une extrémité de I (différent de $\pm\infty$), $\mathscr{D}$ désignera I ou $I \setminus \{x_0\}$;
- toutes les fonctions considérées seront définies sur $\mathscr{D}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

2.1 Développement limité à l'ordre 1

Définition.

On dit qu'une fonction $f : \mathscr{D} \to \mathbb{R}$ admet un **développement limité d'ordre** 1 **en** x_0 s'il existe deux réels a_0 et a_1 tels que :

$$f(x) \underset{x \to x_0}{=} \underbrace{a_0 + a_1(x - x_0)}_{\text{partie régulière}} + \underbrace{o(x - x_0)}_{\text{reste}}.$$

Propriété 10 (Unicité du développement limité à l'ordre 1)

S'il existe, le développement limité à l'ordre 1 en x_0 d'une fonction est unique.

Preuve.

□

Théorème 11 (Formule de Taylor-Young à l'ordre 1)

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $x_0 \in I$.
f est dérivable en x_0 si et seulement si f admet un développement limité d'ordre 1 en x_0, et ce développement limité est alors nécessairement :

$$f(x) \underset{x \to x_0}{=} f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0).$$

Preuve.

$\square$

Remarque. D'après la formule de Taylor-Young à l'ordre 1, on a $f(x) \simeq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ au voisinage de x_0. On retrouve ainsi la propriété selon laquelle la courbe d'une fonction se confond avec sa tangente au voisinage d'un point.

2.2 Développement limité à l'ordre 2

Définition.

On dit qu'une fonction $f : \mathscr{D} \to \mathbb{R}$ admet un **développement limité d'ordre** 2 **en** x_0 s'il existe trois réels a_0, a_1 et a_2 tels que :

$$f(x) \underset{x \to x_0}{=} \underbrace{a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2}_{\text{partie régulière}} + \underbrace{o((x - x_0)^2)}_{\text{reste}}.$$

Propriété 12 (Unicité du développement limité à l'ordre 2)

S'il existe, le développement limité à l'ordre 2 en x_0 d'une fonction est unique.

Théorème 13 (Formule de Taylor-Young à l'ordre 2)

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $x_0 \in I$.
Si f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur I, alors f admet un développement limité d'ordre 2 en x_0 donné par la formule :

$$f(x) \underset{x \to x_0}{=} f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + o((x - x_0)^2).$$

Méthode.

Cette formule permet :

- *de déterminer le développement limité d'ordre 2 d'une fonction f de classe $\mathscr{C}^2$ au voisinage d'un point x_0 en calculant $f(x_0)$, $f'(x_0)$ et $f''(x_0)$.*
- *de déterminer par identification $f(x_0)$, $f'(x_0)$ et $f''(x_0)$ d'une fonction f de classe $\mathscr{C}^2$ à partir de son développement limité d'ordre 2 au voisinage d'un point x_0.*

Exercice. Déterminer le développement limité à l'ordre 2 de ln au voisinage de 1.

Propriété 14 (Lien entre les développements limités d'ordre 1 et 2)

Si f admet un développement limité d'ordre 2 en x_0 donné par la formule :

$$f(x) \underset{x \to x_0}{=} a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + o((x - x_0)^2),$$

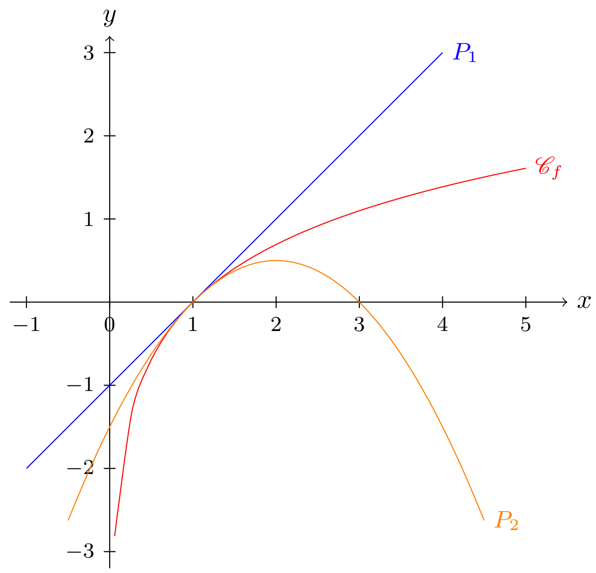
alors f admet un développement limité d'ordre 1 en x_0 donné par la formule :

$$f(x) \underset{x \to x_0}{=} a_0 + a_1(x - x_0) + o(x - x_0).$$

Ainsi, on déduit le développement limité d'ordre 1 en tronquant le développement limité d'ordre 2.

Remarque. Si f admet un développement limité en x_0, alors f peut être approximée **localement** en x_0 par sa partie régulière. Par exemple, la fonction ln peut être approximée localement par les parties régulières de son développement limité en 1 :

- à l'ordre 1 par $P_1(x) = x - 1$ (on approxime f par sa tangente en 1),
- à l'ordre 2 par $P_2(x) = (x - 1) - \dfrac{1}{2}(x - 1)^2$.



On constate que la partie régulière du développement limité d'ordre 2 est une meilleure approximation de f au voisinage de x_0 que celle du développement limité d'ordre 1. Notons également que les parties régulières ne sont de bonnes approximations de f qu'au voisinage de x_0. Un développement limité n'a donc d'intérêt qu'au voisinage de x_0, ce qui justifie la notation $\underset{x \to x_0}{=}$ dans l'écriture du développement limité.

2.3 Calculs de développements limités

Théorème 15 (Développements limités usuels au voisinage de 0)

(1) $e^x \underset{x \to 0}{=} 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + o(x^2)$

(2) $\ln(1+x) \underset{x \to 0}{=} x - \dfrac{x^2}{2} + o(x^2)$

(3) $\forall \alpha \in \mathbb{R},\ (1+x)^\alpha \underset{x \to 0}{=} 1 + \alpha x + \dfrac{\alpha(\alpha-1)}{2} x^2 + o(x^2)$

Preuve.

$\square$

Exercice. Calculer les développements limités à l'ordre 2 en 0 des fonctions suivantes :

- $f(x) = \ln(1-x)$

- $g(x) = \sqrt{1+2x}$

- $h(x) = \dfrac{1}{1-x^2}$

Propriété 16 (Opérations sur les développements limités)

On peut :

- ajouter deux développements limités en les ajoutant terme à terme ;
- multiplier deux développements limités en multipliant les parties régulières et en tronquant au plus petit des deux ordres.

Méthode.
Pour calculer le développement limité d'une fonction f en x_0, on procèdera ainsi :

- *Si $x_0 \neq 0$, on se ramène en 0 en posant $h = x - x_0 \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} 0$ et $g(h) = f(x_0 + h)$.*
- *On détermine le développement limité de g en 0 pour la variable h à l'aide des développements limités usuels en 0 et des opérations sur les développements limités.*
- *On remplace h par $x - x_0$ dans le développement limité de g pour obtenir celui de f en x_0.*

Exercice. Calculer les développements limités à l'ordre 2 en x_0 des fonctions suivantes :

- $f(x) = \dfrac{\ln(1-x^2)}{1-x}$ en $x_0 = 0$.

- $g(x) = \dfrac{e^x}{x}$ en $x_0 = 1$.

- $h(x) = 2\ln(x) + \dfrac{3}{x}$ en $x_0 = 1$.

2.4 Applications

Pour trouver des équivalents ou des limites

Propriété 17 (Développements limités et équivalents)

Supposons que f admette un développement limité d'ordre 2 en x_0 :

$$f(x) \underset{x\to x_0}{=} a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + o((x-x_0)^2).$$

Alors :

- Si $a_0 \neq 0$, $f(x) \underset{x\to x_0}{\sim} a_0$.
- Si $a_0 = 0$ et $a_1 \neq 0$, $f(x) \underset{x\to x_0}{\sim} a_1(x-x_0)$.
- Si $a_0 = a_1 = 0$ et $a_2 \neq 0$, $f(x) \underset{x\to x_0}{\sim} a_2(x-x_0)^2$.

Ainsi, une fonction est équivalente au premier terme non nul de son développement limité.

Remarque. On retrouve les équivalents usuels à partir des développements limités usuels :

- $e^x \underset{x\to 0}{=} 1 + x + o(x)$, donc $e^x - 1 \underset{x\to 0}{=} x + o(x)$ et donc $e^x - 1 \underset{x\to 0}{\sim} x$.
- $\ln(1+x) \underset{x\to 0}{=} x + o(x)$, donc $\ln(1+x) \underset{x\to 0}{\sim} x$.
- $(1+x)^\alpha \underset{x\to 0}{=} 1 + \alpha x + o(x)$, donc $(1+x)^\alpha - 1 \underset{x\to 0}{=} \alpha x + o(x)$ et donc $(1+x)^\alpha - 1 \underset{x\to 0}{\sim} \alpha x$.

Méthode.
Pour déterminer un équivalent d'une fonction, on essaie d'abord d'utiliser les équivalents classiques et les règles de calculs sur les équivalents.
Si cela ne suffit pas (par exemple lorsqu'un facteur est une somme de termes sans terme prépondérant) :

- *On calcule les développements limités des facteurs qui posent problème.*
- *On obtient ensuite un équivalent des facteurs qui posent problème en prenant le premier terme non nul de leur développement limité.*
- *On obtient enfin un équivalent de la fonction par opération sur les équivalents.*

Exercice. Déterminer un équivalent simple puis la limite en x_0 des fonctions suivantes :

- $f(x) = \dfrac{\ln(1+x) - x}{\sqrt{1+2x} - \sqrt{1-2x}}$ en $x_0 = 0$.

- $g(x) = \dfrac{\ln(x) - x + 1}{(x-1)^2}$ en $x_0 = 1$.

Pour trouver l'équation d'une tangente

Méthode.
Soit f une fonction définie en x_0 et admettant un développement limité d'ordre 2 en x_0 :

$$f(x) \underset{x \to x_0}{=} a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + o((x - x_0)^2).$$

Alors la droite T d'équation $y = a_0 + a_1(x - x_0)$ est tangente à la courbe représentative de f notée $\mathscr{C}_f$ en x_0 et :

- *Si $a_2 > 0$, $\mathscr{C}_f$ est au dessus de T (et f est convexe) au voisinage de x_0.*
- *Si $a_2 < 0$, $\mathscr{C}_f$ est en dessous de T (et f est concave) au voisinage de x_0.*

Exercice. Soit $f(x) = e^{-2x}\sqrt{1+x}$. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe représentative de f en 0 et leurs positions relatives au voisinage de 0.

Pour trouver l'équation d'une asymptote

On commence par déterminer le développement limité de la fonction au voisinage de $\pm\infty$:

Méthode.

Pour calculer le développement limité d'une fonction f en $\pm\infty$, on procèdera ainsi :

- *On se ramène en 0 en posant $h = \dfrac{1}{x} \underset{x\to\pm\infty}{\longrightarrow} 0$ et $g(h) = f\left(\dfrac{1}{h}\right)$ (mais il peut arriver que l'énoncé propose un autre changement de variable comme $h = -\dfrac{1}{x}$ ou $h = \dfrac{1}{x^2}$ ou...).*
- *On détermine le développement limité de g en 0 pour la variable h à l'aide des développements limités usuels en 0 et des opérations sur les développements limités.*
- *On remplace h par $\dfrac{1}{x}$ dans le développement limité de g pour obtenir celui de f en $\pm\infty$.*

Exercice. Déterminer un développement limité en $+\infty$ des fonctions suivantes :

- $f(x) = \dfrac{x}{x-1}$

- $g(x) = x^2\left(\ln(x+1) - \ln(x)\right)$

Méthode.

On rappelle que la droite d'équation $y = ax + b$ *est asymptote à la courbe représentative de* f *au voisinage de* $+\infty$ *si :*

$$\lim_{x \to +\infty} (f(x) - (ax + b)) = 0.$$

Si $f(x) \underset{x \to +\infty}{=} ax + b + \dfrac{c}{x} + o\left(\dfrac{1}{x}\right)$*, alors la droite* Δ *d'équation* $y = ax + b$ *est asymptote à la courbe représentative de* f *notée* $\mathscr{C}_f$ *au voisinage de* $+\infty$ *et on a :*

- *Si* $c < 0$*, alors* $\mathscr{C}_f$ *est localement située en dessous de* Δ*.*
- *Si* $c > 0$*, alors* $\mathscr{C}_f$ *est localement située au dessus de* Δ*.*

L'étude est du même genre au voisinage de $-\infty$*, mais la position relative de* $\mathscr{C}_f$ *et de* Δ *est inversée.*

Exercice. Soit f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par : $f(x) = \sqrt{x^2 + x}$.
Déterminer l'asymptote à la courbe représentative de f au voisinage de $+\infty$, puis préciser la position relative de la courbe et de son asymptote au voisinage de $+\infty$.