Chapitre 7

Chaînes de Markov

Compétences attendues.

- ✓ Connaître le vocabulaire de base associé aux graphes.
- ✓ Déterminer si un graphe possède une chaîne eulérienne ou un cycle eulérien.
- ✓ Construire et utiliser la matrice d'adjacence d'un graphe.
- ✓ Appliquer l'algorithme de Dijkstra.
- ✓ Construire le graphe probabiliste et la matrice de transition associés à une chaîne de Markov.
- ✓ Rechercher les états stables d'une chaîne de Markov.
- ✓ Simuler une chaîne de Markov sur `Python` et tracer les lois empiriques et théoriques.

Anthony Mansuy
Professeur de Mathématiques en deuxième année de CPGE filière ECG au Lycée Clemenceau (Reims)
Page personnelle : `http://anthony-mansuy.fr`
E-mail : `mansuy.anthony@hotmail.fr`

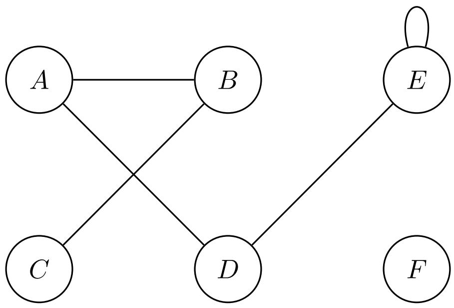
1 Théorie des graphes

1.1 Définitions et première propriété

Définition.

- Un graphe est un ensemble constitué de points appelés **sommets** du graphe reliés éventuellement entre eux par des **arêtes**.
- Une arête reliant un sommet à lui-même est appelée **boucle**.
- Un sommet est dit **isolé** si aucune arête ne le relie à un autre sommet.
- Deux sommets reliés par une arête sont dits **adjacents**.

Exemple. Voici un exemple de graphe, que l'on notera G_1 :



Définition.

- On appelle **ordre** d'un graphe le nombre de sommets le constituant.
- On appelle **degré** d'un sommet le nombre d'arêtes dont ce sommet est une extrémité.

Remarque. Du point de vue du degré, les boucles comptent double car une boucle part d'un sommet pour y revenir.

Exemple. Donner l'ordre du graphe G_1 et le degré de chacun de ses sommets.

Propriété 1 (Formule d'Euler ou formule des poignées de main)

Soit n et p deux entiers naturels non nuls.
On considère un graphe constitué de n sommets notés $A_1, \ldots, A_n$ et de p arêtes. Alors :

$$\sum_{i=1}^{n} d_i = 2p$$

où, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, d_i est le degré du sommet A_i.

Exercice. Vérifier la formule d'Euler pour le graphe G_1 :

Exercice. En arrivant à la soirée de la "promotion d'honneur", les 36 étudiants d'ECG2 Mathématiques Appliquées se saluent en se serrant la main. Déterminer le nombre p de poignées de mains serrés.

Définition.

Un graphe est dit **complet** si chaque sommet est adjacent à tous les autres.

Exercice. Tracer les graphes complets d'ordre 2, 3, 4 et 5.

1.2 Chaînes

Définition.

- On appelle **chaîne** toute liste de sommets dans laquelle deux sommets consécutifs sont reliés par une arête.
- Une chaîne est dite **fermée** lorsque le sommet initial coïncide avec le sommet final.
- On appelle **cycle** toute chaîne fermée dans laquelle chaque arête est parcourue une seule fois.

Exemple. $C - B - A - D$ est une chaîne de G_1.

Définition.

- On appelle **longueur** d'une chaîne le nombre d'arêtes qui la composent.
- On appelle **distance** entre deux sommets d'un graphe, la longueur minimale obtenue en considérant toutes les chaînes reliant ces deux sommets.
- On appelle **diamètre** d'un graphe la plus grande distance parmi toutes les distances séparant chaque paire de sommets.

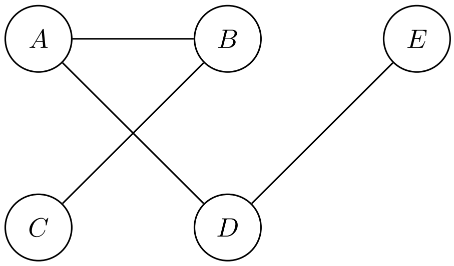
Exemple. Dans le graphe G_1, la chaîne $C - B - A - D$ a pour longueur 3. La distance entre E et B est 3 et le diamètre de ce graphe est 4.

Définition.

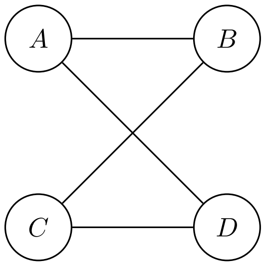
- Une **chaîne eulérienne** est une chaîne contenant toutes les arêtes du graphe, chacune étant parcourue une seule fois.
- Un **cycle eulérien** désigne une chaîne eulérienne fermée.
- Un graphe est dit **eulérien** s'il contient au moins un cycle eulérien.

Exemples.

- Dans le graphe G_2 ci-dessous, la chaîne $C - B - A - D - E$ est une chaîne eulérienne :



- Le graphe G_3 ci-dessous est eulérien car il contient le cycle eulérien $A - B - C - D - A$:



Définition.

On dit qu'un graphe est **connexe** si chaque sommet de ce graphe peut être relié par au moins une chaîne à n'importe quel autre sommet.

Exemple. G_2 et G_3 sont connexes mais pas G_1.

Propriété 2 (CNS d'existence d'une chaîne eulérienne / Caractérisation des graphes eulériens)

Soit G un graphe connexe.

(1) G possède une chaîne eulérienne si et seulement si il possède zéro ou deux sommet(s) de degré impaire.

(2) G est un graphe eulérien si et seulement si tous ses sommets sont de degré pair.

Exemples.

- Dans le graphe G_2, les sommets C et E sont les seuls avec un degré impair (ils sont de degré 1). Cela confirme la chaîne eulérienne $C - B - A - D - E$.
- Dans le graphe G_3, tous les sommets sont de degré pair (il sont tous de degré 2), ce qui confirme l'existence du cycle eulérien $A - B - C - D - A$.

1.3 Matrice d'adjacence d'un graphe

Définition.

Soit n un entier naturel non nul.
Soit G un graphe dont les sommets sont les éléments de $[\![1, n]\!]$.
On appelle **matrice d'adjacence** du graphe G la matrice $M = (m_{i,j}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que, pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, $m_{i,j}$ désigne le nombre de chaînes de longueur 1 reliant les sommets i et j.

Remarques.

1. Lorsque les sommets sont des lettres, on fait correspondre l'ordre alphabétique avec l'ordre numérique : 1 pour A, 2 pour B...
2. La matrice d'adjacence est symétrique : si une arête relit deux sommets i et j, alors $m_{i,j} = m_{j,i} = 1$.

Exercice. Déterminer la matrice d'adjacence M du graphe G_2.

Propriété 3 (de la matrice d'adjacence)

Soit n un entier naturel non nul, G un graphe dont les sommets sont numérotés de 1 à n, M la matrice d'adjacence du graphe G et d un élément de $[\![1, n]\!]$.
Pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, le coefficient situé en ligne i et colonne j de la matrice M^d est égal au nombre de chaînes de longueur d reliant le sommet i au sommet j.

Exercice.

1. Calculer M^2 et M^3, où M est la matrice d'adjacence du graphe G_2.
2. Déterminer le nombre de chaînes de longueur 2 entre A et E et entre A et A.
3. Déterminer le nombre de chaînes de longueur 3 entre A et E et entre A et D.

Propriété 4 (Condition nécessaire et suffisante de connexité)

Soit n un entier naturel non nul, G un graphe dont les sommets sont numérotés de 1 à n et M la matrice d'adjacence du graphe G.
Le graphe G est **connexe** si et seulement si la matrice $I_n + M + \ldots + M^{n-1}$ a tous ses coefficients strictement positifs.

Exemple. Toujours avec M la matrice d'adjacence du graphe G_2, on a :

$$I_5 + M + M^2 + M^3 + M^4 = \begin{pmatrix} 9 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 8 & 3 & 5 & 1 \\ 4 & 3 & 4 & 1 & 1 \\ 4 & 5 & 1 & 8 & 3 \\ 4 & 1 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Tous ses coefficients sont strictement positifs donc le graphe G_2 est bien connexe.

Méthode.
Une matrice d'adjacence M sert principalement à répondre à deux types de questions :

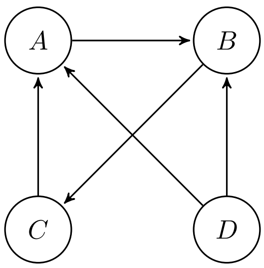
1. *Trouver le nombre de chemins de longueur d reliant deux sommets i et j en examinant le coefficient situé en ligne i et colonne j de M^d.*
2. *Établir la connexité d'un graphe en vérifiant que les coefficients de $I_n + M + \ldots + M^{n-1}$ sont tous strictement positifs.*

1.4 Graphes orientés

Définition.

On appelle **graphe orienté** tout graphe dans lequel chaque arête est orientée, c'est-à-dire que chaque arête est dirigée d'un sommet vers un autre, à l'aide d'une flèche.

Exemple. Le graphe G_4 ci-dessous est orienté :



Remarques.

1. La formule d'Euler ne s'applique pas aux graphes orientés.
2. Une chaine est dite orientée si les arêtes reliant les sommets successifs de la chaîne sont orientées.
   Par exemple, $D - A - B - C$ est une chaîne orientée du graphe G_4.
3. Le coefficient $m_{i,j}$ de la matrice d'adjacence d'un graphe orienté désigne le nombre de chaînes de longueur 1 partant du sommet i pour arriver au sommet j. La matrice d'adjacence n'est donc pas nécessairement symétrique.

4. Les propriétés 3 et 4 sont encore valables dans le cas d'un graphe orienté :
   - Le coefficient situé en ligne i et colonne j de la matrice M^d est égal au nombre de chaînes orientées de longueur d partant du sommet i pour arriver au sommet j.
   - Le graphe G est connexe si et seulement si la matrice $I_n + M + \ldots + M^{n-1}$ a tous ses coefficients strictement positifs.

Attention.
Avant de construire une matrice d'adjacence, attention à bien remarquer si le graphe est orienté ou non.

Exercice.

1. Déterminer la matrice d'adjacence M du graphe G_4.

2. Après avoir calculer M^2 et M^3, déterminer tous les chaînes orientées de longueurs 2 et 3 dans G_4.

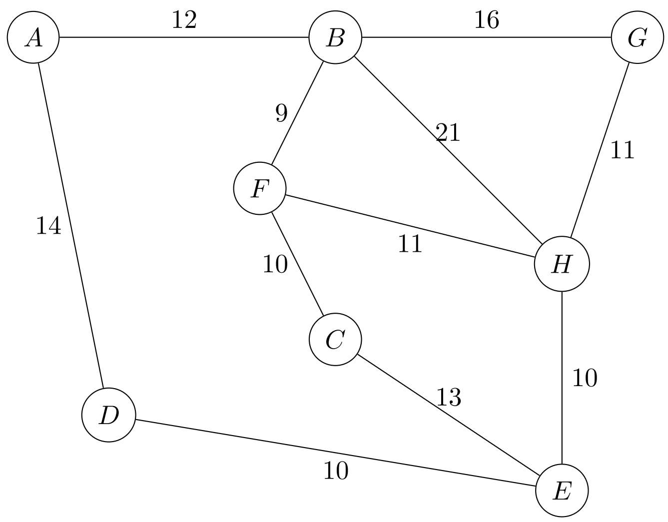
3. Le graphe G_4 est-il connexe ?

1.5 Graphes pondérés

Définition.

On appelle **graphe pondéré** tout graphe dans lequel chaque arête est pondérée par un réel positif appelé le **poids** de l'arête.

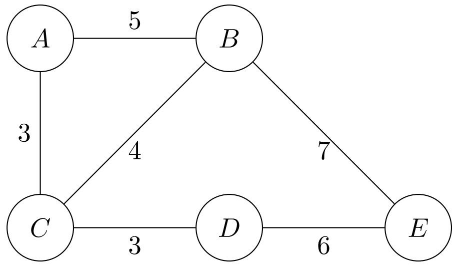
Exemple. Le graphe G_5 suivant est pondéré :

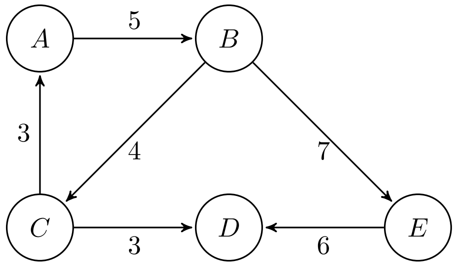


Remarques.

1. Le coefficient $m_{i,j}$ de la matrice d'adjacence d'un graphe pondéré désigne le poids des chaînes de longueur 1 reliant les sommets i et j.
2. Le coefficient $m_{i,j}$ de la matrice d'adjacence d'un graphe orienté et pondéré désigne le poids des chaînes de longueur 1 partant du sommet i pour arriver au sommet j.

Exemples. Donner les matrices d'adjacences des deux graphes suivants :





Méthode.

Dans un graphe pondéré, on cherche à déterminer le plus court chemin entre deux sommets.

*Pour cela, on applique l'**algorithme de Dijkstra**. Pour une application pas à pas de cet algorithme, regarder la vidéo accessible en cliquant sur ce lien.*

Exercice. Déterminer le plus court chemin dans le graphe pondéré G_5 pour aller du point A au point H.

2 Chaînes de Markov

2.1 Définitions

Définition.

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ à valeurs dans un ensemble E.

- On dit que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une **chaîne de Markov** lorsque pour tout $n \in \mathbb{N}$, la loi de X_{n+1} ne dépend que de la loi de X_n (et non des lois des variables précédentes), soit de manière formelle :

$$\forall (e_0, \ldots, e_n, e_{n+1}) \in E^{n+2},\ P_{(X_0=e_0)\cap\cdots\cap(X_n=e_n)}(X_{n+1}=e_{n+1}) = P_{(X_n=e_n)}(X_{n+1}=e_{n+1})$$

  On parle de **processus sans mémoire** : la loi du future (instant $n+1$) ne dépend que du présent (instant n) et non du passé (instants $0, \ldots, n-1$).

- Les éléments de E sont alors appelés les **états** de la chaîne de Markov.

Exemple. À des fins d'étude sociologique, une population d'individus est divisée en trois classes sociales :

- *lower class* (classe 1) ;
- *middle class* (classe 2) ;
- *upper class* (classe 3).

On souhaite étudier l'évolution des classes sociales des individus au fil des générations.

Dans la population étudiée, on considère qu'un enfant :

- né dans la *lower class* a, à l'âge adulte, 50% de chances de faire partie de la *lower class*, 30% de chances de faire partie de la *middle class* et 20% de chances de faire partie de la *upper class*,
- né dans la *middle class* a, à l'âge adulte, 20% de chances de faire partie de la *lower class* et 80% de chances de faire partie de la *middle class*,
- né dans la *upper class* a, à l'âge adulte, 30% de chances de faire partie de la *lower class*, 30% de chances de faire partie de la *middle class* et 40% de chances de faire partie de la *upper class*.

On suppose que ces probabilités d'évolution sociologique ne changent pas au cours des générations.

Considérons un individu de la classe sociale 1 à la génération 0, et notons X_0 la variable aléatoire certaine égale à 1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note X_n la variable aléatoire indiquant la classe sociale d'un de ses descendants à la n-ème génération.

On constate que, ainsi définie, la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une **chaîne de Markov**, car la loi de X_{n+1} ne dépend que de celle de X_n et pas des lois des variables précédentes $X_0, \ldots, X_{n-1}$. L'ensemble des états associés à cette chaîne est $E = [\![1, 3]\!]$.

Définition.

Un **graphe probabiliste** associé à une chaîne de Markov est un graphe orienté et pondéré dans lequel :

- les sommets correspondent aux différents **états** de la chaîne de Markov ;
- les valeurs sur les arcs, appelés **poids**, indiquent les probabilités de passage d'un état à l'autre.

Méthode.

Pour tracer le graphe probabiliste associé à une chaîne de Markov :

1. *On comptabilise les différents états de la chaîne de Markov. S'il y en a p, on représente un graphe à p sommets.*
2. *On dessine les arcs orientés entre les sommets avec un poids qui correspond à la probabilité de passage d'un état à un autre état (éventuellement d'un état à lui-même).*

Exercice. Tracer le graphe probabiliste associé à la chaîne de Markov décrite précédemment.

Notation. Dans toute la suite, $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ désignera une chaîne de Markov :

- **homogène** ce qui signifie que les probabilités $P_{(X_n=a)}(X_{n+1}=b)$ pour $(a,b)\in E^2$ ne dépendent pas de n,
- **à espace d'états finis** ce qui signifie que l'ensemble E est fini et, pour simplifier, on prendra $E=[\![1,p]\!]$ avec $p\geq 1$,
- **irréductible** ce qui signifie que sur le graphe, il y a toujours un chemin pour passer d'un état à un autre.

2.2 Matrice de transition

Définition.

Soit $p\in\mathbb{N}^*$.

- On dit que $U\in\mathscr{M}_{1,p}(\mathbb{R})$ est un vecteur-ligne **stochastique** (ou **probabiliste**) si tous les coefficients de U sont positifs et si leur somme est égale à 1.
- On dit que $A\in\mathscr{M}_p(\mathbb{R})$ est une matrice **stochastique par ligne** si tous les coefficients de A sont positifs et si la somme de chaque ligne vaut 1.

Propriété 5 (d'une matrice stochastique par ligne)

Soit $A\in\mathscr{M}_p(\mathbb{R})$ est une matrice stochastique par ligne.
Alors 1 est valeur propre de A et donc de ${}^tA$.

Preuve.

$\square$

Définition.

- Pour tout entier naturel n, le **n-ième état probabiliste** de la chaîne de Markov $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la matrice ligne définie par :

$$U_n = \begin{pmatrix} P(X_n = 1) & P(X_n = 2) & \dots & P(X_n = p) \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{1,p}(\mathbb{R}).$$

  Le 0-ième état U_0 est souvent appelé **état initial**.

- La **matrice de transition** de la chaîne de Markov $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la matrice $A = (a_{i,j}) \in \mathscr{M}_p(\mathbb{R})$ définie par :

$$A = \begin{pmatrix} P_{(X_n=1)}(X_{n+1} = 1) & P_{(X_n=1)}(X_{n+1} = 2) & \dots & P_{(X_n=1)}(X_{n+1} = p) \\ P_{(X_n=2)}(X_{n+1} = 1) & P_{(X_n=2)}(X_{n+1} = 2) & \dots & P_{(X_n=2)}(X_{n+1} = p) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ P_{(X_n=p)}(X_{n+1} = 1) & P_{(X_n=p)}(X_{n+1} = 2) & \dots & P_{(X_n=p)}(X_{n+1} = p) \end{pmatrix}.$$

  Le coefficient $a_{i,j} = P_{(X_n=i)}(X_{n+1} = j)$ est la **probabilité de transition de l'état i à l'état j**.

Exercice. Donner la matrice de transition associée à la chaîne de Markov sur l'évolution sociologique d'une société.

Propriété 6 (d'une chaîne de Markov)

(1) Pour tout entier naturel n, le n-ième état probabiliste U_n de la chaîne de Markov $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un **vecteur-ligne stochastique**.

(2) La matrice de transition A de la chaîne de Markov $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une **matrice stochastique par ligne**.

Preuve.

□

Remarque. Pour en savoir plus sur les matrices stochastiques :

☞ **Séance d'approfondissement 7 : Chaînes de Markov.**

Définition.

Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathscr{M}_p(\mathbb{R})$ une matrice stochastique.
On appelle **graphe associé à** A le graphe orienté et pondéré à p sommets tel que le poids de l'arc orienté qui permet de passer du sommet i au sommet j est $a_{i,j}$.

Exercice. On considère la matrice $A = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$. Dessiner le graphe probabiliste associé à A.

Remarque. Il est donc équivalent de donner le graphe probabiliste associé à une chaîne de Markov et de donner sa matrice de transition : on peut construire la matrice de transition associée à un graphe probabiliste (c'est la matrice d'adjacence de ce graphe) et inversement.

Propriété 7 (Loi d'une chaîne de Markov)

Soit A la matrice de transition de la chaîne de Markov $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et U_n le n-ième état probabiliste. Alors :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ U_{n+1} = U_n \times A \quad \text{ce qui donne par récurence} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ U_n = U_0 \times A^n.$$

Preuve.

$\square$

Attention.

Il peut être demandé dans les sujets de concours de redémontrer cette propriété sur un exemple de chaîne de Markov.

Exercice. Considérons toujours le cas de la chaîne de Markov sur l'évolution sociologique d'une société et notons A sa matrice de transition.

1. Déterminer la matrice D telle que $A = PDP^{-1}$ où $P = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}$.

2. En déduire, pour tout entier naturel n, l'expression de A^n.

3. Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le n-ième état probabiliste U_n.

2.3 Comportement limite

Remarque. U est un vecteur-ligne stochastique si et seulement si il définit une loi de probabilité, c'est-à-dire qu'il existe une variable aléatoire X telle que $X(\Omega) = [\![1, p]\!]$ et

$$U = \begin{pmatrix} P(X=1) & P(X=2) & \dots & P(X=p) \end{pmatrix}.$$

Définition.

Soit A la matrice de transition de la chaine de Markov $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $U \in \mathscr{M}_{1,p}(\mathbb{R})$ un vecteur-ligne stochastique. La loi de probabilité associée à U est appelée **loi stationnaire** ou **état stable** de $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lorsque :

$$UA = U.$$

Remarque. Si à un instant $n_0 \in \mathbb{N}$, on a $U_{n_0} = U$ alors pour tout $n \geq n_0$, on a :

$$U_n = U_0 \times A^n = U_0 \times A^{n_0} \times A^{n-n_0} = U_{n_0} \times A^{n-n_0} = U \times A^{n-n_0} = U$$

et la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est stationnaire à partir du rang n_0.

Propriété 8 (État stable d'une chaîne de Markov)

Soit A la matrice de transition de la chaîne de Markov $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(1) Un **état stable** U, s'il existe, est tel que ${}^tU$ est un **vecteur propre** de ${}^tA$ associé à la valeur propre 1.

(2) La **loi limite** de $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie, si elle existe, par le vecteur-ligne

$$\begin{pmatrix} \lim\limits_{n\to+\infty} P(X_n=1) & \dots & \lim\limits_{n\to+\infty} P(X_n=p) \end{pmatrix}$$

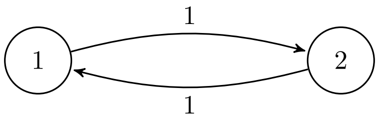
est un **état stable** de $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Preuve.

□

Exemple. Vérifier sur l'exemple de l'évolution sociologique d'une société, qu'il y a bien convergence de cette chaîne de Markov vers un état stable et le déterminer.

Remarque. Il n'y a pas toujours convergence vers une loi limite. Par exemple, pour la chaîne de Markov associée au graphe probabiliste :



la matrice de transition est $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $U = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$ est l'unique état stable.

- Si $U_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$, alors on montre que $U_n = \begin{pmatrix} \dfrac{1+(-1)^n}{2} & \dfrac{1-(-1)^n}{2} \end{pmatrix}$ et $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers U.
- Si $U_0 = U$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n = U$ et $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge donc vers U.

Attention.
Dans la littérature, la matrice de transition désigne parfois la transposée de la matrice définie dans ce cours. Il faut dans ce cas "transposer" tous les résultats et remplacer ligne par colonne.

2.4 Informatique

Dans cette partie, on s'intéresse toujours à la chaîne de Markov associée à l'exemple de l'évolution sociologique d'une société.

On suppose importé sur `Python` les modules `numpy` avec le raccourci `np`, `numpy.random` avec le raccourci `rd`, `numpy.linalg` avec le raccourci `al` et `matplotlib.pyplot` avec le raccourci `plt`.

Loi empirique d'une chaîne de Markov

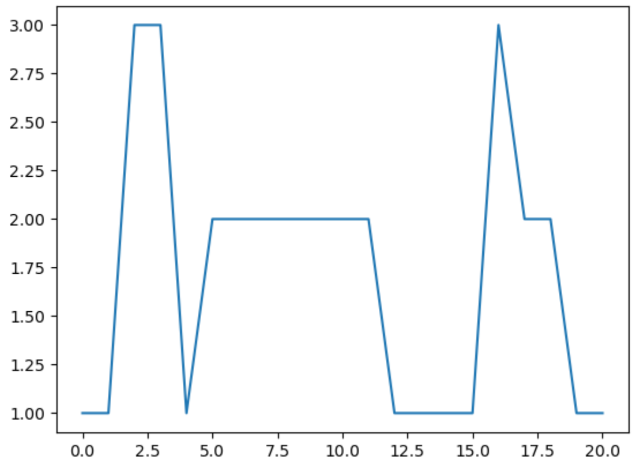
1. Compléter la fonction `classe_suivante(i)` afin qu'elle prenne en entrée un paramètre $i \in [\![1, 3]\!]$ correspondant à la classe sociale d'un individu à l'âge adulte, et qu'elle simule la classe sociale de son enfant (c'est-à-dire un élément de $[\![1, 3]\!]$ en suivant les règles définies par la chaîne de Markov).

```python
def classe_suivante(i):
    j = i
    p = rd.random()
    if i == 1:
        if p <= 0.3:
            j = 2
        elif p <= 0.5:
            j = 3
    if i == ..... :
        if p <= ..... :
            j = .....
    if i == ..... :
        if p <= ..... :
            j = .....
        elif p <= ..... :
            j = .....
    return(j)
```

2. À l'aide de la fonction `classe_suivante`, on souhaite simuler l'évolution sociologique d'un individu de la *lower class* sur 20 générations et représenter graphiquement cette trajectoire. Compléter le programme suivant :

```python
G = np.zeros(21)
G[0] = .....
for k in range(20):
    G[k+1] = .....
n = np.arange(21)
plt.plot(n,G)
plt.show()
```

On obtient le graphique suivant :



3. On souhaite construire un vecteur `U` contenant 1000 simulations de la classe sociale au bout de 20 générations, toujours en partant d'un individu de la *lower class*. Compléter le programme suivant :

```python
U = np.zeros(1000)
for i in range(1000):
    G = np.zeros(21)
    G[0] = .....
    for k in range(20):
        G[k+1] = .....
    U[i] = .....
```

4. Après exécution des programmes précédents, on entre les commandes suivantes dans la console :

```
>>> np.sum(U==1)/1000
0.291

>>> np.sum(U==2)/1000
0.611

>>> np.sum(U==3)/1000
0.098
```

Que retournent ces commandes ? Comment interpréter ces résultats ?

Loi théorique d'une chaîne de Markov

5. Donner les commandes pour définir sur `Python` la matrice A et le vecteur U_0.

6. On suppose U_0 et A bien définis et on entre dans la console les commandes suivantes :

```
>>> U10 = np.dot(U0, al.matrix_power(A,10))
[0.30019536   0.59941406   0.10039057]

>>> U20 = np.dot(U0, al.matrix_power(A,20))
[0.30000019   0.59999943   0.10000038]
```

À l'aide des résultats retournés par `Python`, déterminer la probabilité qu'un individu de la 10-ème génération pris au hasard soit de la *upper class* ? et un de la 20-ème génération soit de la *lower class* ?

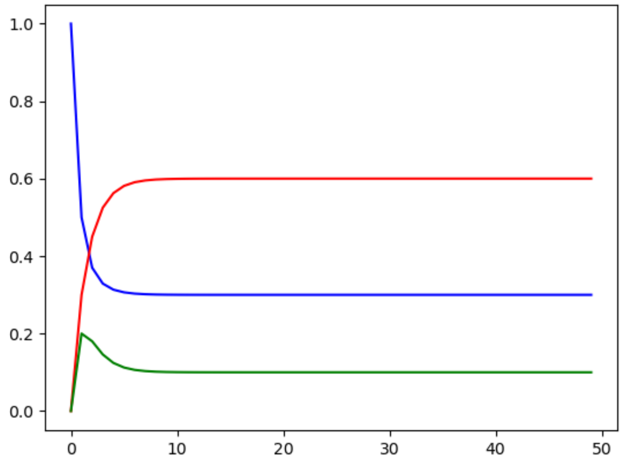
7. Quel est le lien entre les résultats obtenus à la question 4. et ceux de la question précédente ?

8. On considère le programme suivant :

```
E = np.zeros(50,3)
E[0, 0] = 1
for k in range(1,50) :
    E[k, :] = np.dot(E[k-1, :], A)

n = np.arange(50)
plt.plot(n, E[:, 0], color='blue')
plt.plot(n, E[:, 1], color='red')
plt.plot(n, E[:, 2], color='green')
plt.show()
```

Après avoir exécuté ce programme, on obtient le résultat graphique suivant :



Que fait ce programme ? Interpréter le graphique obtenu.

États stables d'une chaîne de Markov

9. A partir de la propriété 8 (page 16), proposer deux méthodes pour déterminer un état stable de la chaîne de Markov :

   (a) En utilisant la commande `al.eig` :

   (b) En utilisant la commande `al.matrix_power` :