Chapitre 8

Espaces vectoriels

Compétences attendues.

✓ Pour chacun des ensembles $\mathbb{R}^n$, $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, $\mathbb{R}[X]$, $\mathbb{R}_n[X]$, $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $\mathscr{F}(A, \mathbb{R})$, il faut :

- savoir que c'est un espace vectoriel muni de ses lois somme et produit par un scalaire (et savoir sommer des vecteurs et multiplier un vecteur par un scalaire),
- connaître l'élément neutre de l'ensemble,
- connaître la base canonique s'il en a et la dimension.

✓ Montrer que $F \subset E$ est un sous-espace vectoriel de E.

✓ Déterminer une famille génératrice d'un sous-espace vectoriel.

✓ Montrer qu'une famille de vecteurs est libre.

✓ Montrer qu'une famille de vecteurs est une base d'un espace vectoriel.

✓ Déterminer une base et la dimension d'un sous-espace vectoriel F de E.

✓ Trouver la matrice de passage d'une base $\mathscr{B}$ vers une base $\mathscr{B}'$.

✓ Déterminer le rang d'une famille de vecteurs.

Anthony Mansuy
Professeur de Mathématiques en deuxième année de CPGE filière ECG au Lycée Clemenceau (Reims)
Page personnelle : `http://anthony-mansuy.fr`
E-mail : `mansuy.anthony@hotmail.fr`

1 Espaces et sous-espaces vectoriels

1.1 Espaces vectoriels

Définition.

Un ensemble non vide E est un **espace vectoriel** si E est muni de deux lois :

- une loi de composition interne $+$: $\forall u, v \in E$, $u + v \in E$,
- une loi de composition externe $\cdot$: $\forall u \in E$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \cdot u \in E$,

vérifiant les propriétés suivantes :

1) Propriétés de la loi $+$:

   a) Commutativité : $\forall u, v \in E$, $u + v = v + u$.
   b) Associativité : $\forall u, v, w \in E$, $u + (v + w) = (u + v) + w$.
   c) Élément neutre : $\exists 0_E \in E$ tel que $\forall u \in E$, $0_E + u = u + 0_E = u$.
   Cet élément 0_E est forcément unique.
   d) Élément symétrique : $\forall u \in E$, $\exists v \in E$ tel que $u + v = v + u = 0_E$.
   Cet élément v est forcément unique et noté $-u$.

2) Propriétés de la loi $\cdot$:

   a) $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\forall u \in E$, $(\lambda\mu) \cdot u = \lambda \cdot (\mu \cdot u)$.
   b) $\forall u \in E$, $1 \cdot u = u$.

3) Distributivité de la loi $\cdot$ sur la loi $+$:

   a) $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall u, v \in E$, $\lambda \cdot (u + v) = \lambda \cdot u + \lambda \cdot v$.
   b) $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\forall u \in E$, $(\lambda + \mu) \cdot u = \lambda \cdot u + \mu \cdot v$.

Les éléments de E sont appelés **vecteurs** et les éléments de $\mathbb{R}$ sont appelés **scalaires**.

Dans toute la suite, $(E, +, \cdot)$ est un espace vectoriel.

Remarques.

1. On peut démontrer que, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et $u \in E$,
$$\lambda \cdot 0_E = 0_E, \qquad 0 \cdot u = 0_E, \qquad \lambda \cdot (-u) = (-\lambda) \cdot u = -(\lambda \cdot u).$$
De plus, si $\lambda \cdot u = 0_E$, alors $\lambda = 0$ ou $u = 0_E$.
2. Le symbole $\cdot$ de la loi de composition externe qui se trouve entre un scalaire et un vecteur est souvent omis. Par contre, l'ordre est important : on écrira toujours **les scalaires à gauche des vecteurs**.
3. Il n'existe pas, a priori, de multiplication entre deux vecteurs de E.

La structure d'espace vectoriel permet d'effectuer des **combinaisons linéaires** dans E :

Définition.

- Un vecteur v est **colinéaire** à un vecteur u s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $v = \lambda \cdot u$.
- Un vecteur v est une **combinaison linéaire** d'une famille $(u_1, \ldots, u_p)$ de p vecteurs de E s'il existe p scalaires $\lambda_1, \ldots, \lambda_p \in \mathbb{R}$ tels que :
$$v = \lambda_1 \cdot u_1 + \ldots + \lambda_p \cdot u_p.$$
Les scalaires λ_i sont les **coefficients** de la combinaison linéaire.

1.2 Espaces vectoriels usuels

L'ensemble $\mathbb{R}^n$ des n-uplets de réels

L'ensemble $\mathbb{R}^n$ muni de l'addition et du produit par un scalaire usuels est un espace vectoriel :

- $(x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)$,
- $\lambda \cdot (x_1, \ldots, x_n) = (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n)$.

L'élément neutre est $0_{\mathbb{R}^n} = (0, \ldots, 0)$.

L'ensemble $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ des matrices de taille $n \times p$ à coefficients réels

L'ensemble $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ muni de l'addition et du produit par un scalaire usuels est un espace vectoriel :

- $\begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{1,1} & \cdots & b_{1,p} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n,1} & \cdots & b_{n,p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1}+b_{1,1} & \cdots & a_{1,p}+b_{1,p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1}+b_{n,1} & \cdots & a_{n,p}+b_{n,p} \end{pmatrix}$,
- $\lambda \cdot \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_{1,1} & \cdots & \lambda a_{1,p} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda a_{n,1} & \cdots & \lambda a_{n,p} \end{pmatrix}$.

L'élément neutre est $0_{\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$.

L'ensemble $\mathbb{R}[X]$ des polynômes à coefficients réels

L'ensemble $\mathbb{R}[X]$ muni de l'addition et du produit par un scalaire usuels est un espace vectoriel :

- pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(P+Q)(x) = P(x) + Q(x)$,
- pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(\lambda \cdot P)(x) = \lambda P(x)$.

L'élément neutre est le polynôme nul.

L'ensemble $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ des suites réelles

L'ensemble $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ muni de l'addition et du produit par un scalaire usuels est un espace vectoriel :

- pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(u+v)_n = u_n + v_n$,
- pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(\lambda \cdot u)_n = \lambda u_n$.

L'élément neutre est la suite nulle.

L'ensemble $\mathscr{F}(A, \mathbb{R})$ des applications de A dans $\mathbb{R}$

L'ensemble $\mathscr{F}(A, \mathbb{R})$, où A est un ensemble quelconque, muni de l'addition et du produit par un scalaire usuels est un espace vectoriel :

- pour tout $a \in A$, $(f+g)(a) = f(a) + g(a)$,
- pour tout $a \in A$, $(\lambda \cdot f)(a) = \lambda f(a)$.

L'élément neutre est l'application nulle.

Méthode.

Pour montrer qu'un ensemble F est un espace vectoriel, on ne reviendra jamais à la définition. On montrera qu'il est un sous-espace vectoriel de l'un des espaces vectoriels usuels décrits précédemment.

1.3 Sous-espaces vectoriels

Définition.

Soit F une partie **non vide** de E.
On dit que F est un **sous-espace vectoriel** de l'espace vectoriel $(E, +, \cdot)$ si $(F, +, \cdot)$ est aussi un espace vectoriel.

Remarque. Si F est un sous-espace vectoriel de E, alors $0_E \in F$.

Exemples.

- $\{0_E\}$ et E sont des sous-espaces vectoriels de E, appelés **sous-espaces vectoriels triviaux** de E.
- Les ensembles $\mathscr{C}(I, \mathbb{R})$, $\mathscr{C}^1(I, \mathbb{R}), \ldots$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathscr{F}(I, \mathbb{R})$.

Propriété 1 (Caractérisation des sous-espaces vectoriels)

F est un **sous-espace vectoriel** de E si et seulement si

(1) F est une partie non vide de E.

(2) F est stable pour la loi $+$: $\forall u, v \in F,\ u + v \in F$.

(3) F est stable pour la loi $\cdot$: $\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \forall u \in F,\ \lambda \cdot u \in F$.

Remarque. Les deux derniers points de la caractérisation des sous-espaces vectoriels peuvent être fusionnés en une seule propriété, la stabilité de F par combinaisons linéaires :

$$\forall u, v \in F,\ \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \lambda \cdot u + v \in F.$$

Méthode.

Pour montrer qu'un ensemble F est un sous-espace vectoriel de E, on montre que :

- *F est une partie non vide de E (en vérifiant que $0_E \in F$),*
- $\forall u, v \in F,\ \forall \lambda \in \mathbb{R},\ \lambda \cdot u + v \in F$ *ou* $\left\{ \begin{array}{l} \forall u, v \in F,\ u + v \in F \\ \forall \lambda \in \mathbb{R},\ \forall u \in F,\ \lambda \cdot u \in F \end{array} \right.$.

Exercice.

1. Montrer que l'ensemble $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 3y + 2z = 0\}$ est un espace vectoriel.

2. Montrer que l'ensemble $\mathbb{R}_n[X]$ des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n est un espace vectoriel.

1.4 Sous-espaces engendrés

Définition.

Soit $(u_1, \ldots, u_p)$ une famille de p vecteurs de E.
On note $\text{Vect}(u_1, \ldots, u_p)$ l'ensemble de toutes les combinaisons linéaires de la famille $(u_1, \ldots, u_p)$:

$$\text{Vect}(u_1, \ldots, u_p) = \{\lambda_1 \cdot u_1 + \ldots + \lambda_p \cdot u_p \mid (\lambda_1, \ldots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^p\}.$$

Théorème 2 (Sous-espaces vectoriels engendrés)

Soit $(u_1, \ldots, u_p)$ une famille de p vecteurs de E.

(1) $\text{Vect}(u_1, \ldots, u_p)$ est un sous-espace vectoriel de E.
On l'appelle le **sous-espace vectoriel engendré** par la famille $(u_1, \ldots, u_p)$.

(2) Si F est un sous-espace vectoriel contenant les vecteurs $u_1, \ldots, u_p$, alors $\text{Vect}(u_1, \ldots, u_p) \subset F$.
Ainsi, $\text{Vect}(u_1, \ldots, u_p)$ est le plus petit sous-espace vectoriel contenant les vecteurs $u_1, \ldots, u_p$.

(3) Pour tous $i \neq j$, pour tous $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\mu \in \mathbb{R}^*$, on a :

- $\text{Vect}(u_1, \ldots, u_i, \ldots, u_j, \ldots, u_p) = \text{Vect}(u_1, \ldots, u_j, \ldots, u_i, \ldots, u_p)$;
- $\text{Vect}(u_1, \ldots, u_i, \ldots, u_j, \ldots, u_p) = \text{Vect}(u_1, \ldots, u_i + \lambda \cdot u_j, \ldots, u_j, \ldots, u_p)$;
- $\text{Vect}(u_1, \ldots, \mu \cdot u_i, \ldots, u_p) = \text{Vect}(u_1, \ldots, u_i, \ldots, u_p)$.

Preuve.

$\square$

Remarque. A partir du point (3) du théorème précédent, on peut montrer l'équivalence suivant :

$$u_{p+1} \in \mathrm{Vect}(u_1, \ldots, u_p) \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{Vect}(u_1, \ldots, u_p, u_{p+1}) = \mathrm{Vect}(u_1, \ldots, u_p).$$

Ainsi, on peut simplifier $\mathrm{Vect}(u_1, \ldots, u_p, u_{p+1})$ si u_{p+1} est combinaison linéaire des vecteurs $u_1, \ldots, u_p$.

Exercice. Montrer l'égalité suivante :

$$\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\right) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right).$$

Méthode.

Pour montrer qu'un ensemble est un espace vectoriel, on peut le mettre sous la forme $\mathrm{Vect}(u_1, \ldots, u_p)$.

Exercice. Montrer que l'ensemble F suivant est un espace vectoriel :

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} a+b & a & b \\ a & a+b & b \\ a & b & a+b \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}) \mid (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

Méthode.

Soit F un sous-espace vectoriel défini par (ou dont la définition se ramène à) un système d'équations linéaires. Pour écrire F sous forme d'un Vect(...) :

1. *On échelonne le système et on identifie inconnues principales et inconnues secondaires ;*
2. *On substitue dans l'expression de F les inconnues principales par les inconnues secondaires.*
3. *On factorise par les inconnues secondaires pour obtenir les vecteurs qui engendrent F.*

Exercice. Écrire $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 3y + 2z = 0\}$ comme sous-espace vectoriel engendré par une famille de vecteurs.

2 Familles de vecteurs

2.1 Familles génératrices

Définition.

Une famille $(u_1, \ldots, u_p)$ de p vecteurs de E est dite **génératrice** de E si tout vecteur de E est une combinaison linéaire de $(u_1, \ldots, u_p)$, c'est-à-dire :

$$\forall v \in E,\ \exists(\lambda_1, \ldots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^p,\ v = \lambda_1 \cdot u_1 + \ldots + \lambda_p \cdot u_p.$$

Autrement dit,

$$E = \text{Vect}(u_1, \ldots, u_p).$$

Exemples.

- La famille $((1, 1))$ n'est pas génératrice de $\mathbb{R}^2$.
- La famille $((1, 1), (2, 2))$ n'est pas génératrice de $\mathbb{R}^2$.
- La famille $((1, 0), (0, 2), (1, 2))$ est génératrice de $\mathbb{R}^2$.

Remarque. Une famille peut être génératrice de E et avoir "trop de vecteurs". Dans ce cas, la décomposition d'un vecteur dans cette famille n'est pas unique. Par exemple, le vecteur $(2, 6)$ de $\mathbb{R}^2$ s'écrit :

$$\begin{aligned}(2, 6) &= 2 \cdot (1, 0) + 3 \cdot (0, 2) + 0 \cdot (1, 2) \\ &= (-1) \cdot (1, 0) + 0 \cdot (0, 2) + 3 \cdot (1, 2) \\ &= 0 \cdot (1, 0) + 1 \cdot (0, 2) + 2 \cdot (1, 2).\end{aligned}$$

Pour que tout vecteur de E puisse s'écrire de manière unique comme une combinaison linéaire de la famille génératrice $(u_1, \ldots, u_p)$, il faut que cette famille vérifie une autre propriété : la propriété de liberté.

Méthode.

Pour trouver une famille génératrice d'un sous-espace vectoriel F, on le met sous la forme

$$F = Vect(u_1, \dots, u_p).$$

Exercice. Donner une famille génératrice du sous-espace vectoriel $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 3y + 2z = 0\}$.

2.2 Familles libres

Définition.

Soit $(u_1, \dots, u_p)$ une famille de p vecteurs de E.

- On dit que $(u_1, \dots, u_p)$ est une famille **libre** (ou que les vecteurs $u_1, \dots, u_p$ sont **linéairement indépendants**) si :

$$\forall (\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^p, \quad \lambda_1 \cdot u_1 + \dots + \lambda_p \cdot u_p = 0_E \Rightarrow \lambda_1 = \dots = \lambda_p = 0.$$

- Dans le cas contraire, on dit que $(u_1, \dots, u_p)$ est une famille **liée** (ou que les vecteurs $u_1, \dots, u_p$ sont **linéairement dépendants**), ce qui s'écrit :

$$\exists (\lambda_1, \dots, \lambda_p) \neq (0, \dots, 0), \quad \lambda_1 \cdot u_1 + \dots + \lambda_p \cdot u_p = 0_E.$$

Remarque. Si au moins un des vecteurs d'une famille est nul, alors cette famille est liée.

Méthode.

Pour montrer qu'une famille $(u_1, \dots, u_p)$ est libre (avec $p \geq 3$), on résout le système :

$$\lambda_1 \cdot u_1 + \dots + \lambda_p \cdot u_p = 0_E$$

d'inconnues $(\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^p$. Deux cas sont possibles :

1. *Le système est de Cramer et $(\lambda_1, \dots, \lambda_p) = (0, \dots, 0)$. Dans ce cas, la famille $(u_1, \dots, u_p)$ est libre.*
2. *Le système est indéterminé. Dans ce cas, la famille $(u_1, \dots, u_p)$ est liée.*

Exercice.

1. Montrer que $((1, 1, -1), (-2, -1, 4), (3, 3, -4))$ est une famille libre de $\mathbb{R}^3$.

2. Montrer que $(x \mapsto \lfloor x \rfloor, x \mapsto x^2, x \mapsto e^x)$ est une famille libre de $\mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Propriété 3 (Caractérisation des familles liées)

Une famille d'au moins deux vecteurs est liée si et seulement si un de ses vecteurs peut s'exprimer comme une combinaison linéaire des autres.

Exercice. Justifier que $((1,1,1),(1,-1,0),(2,0,1))$ est une famille liée de $\mathbb{R}^3$.

Méthode.

Supposons qu'une famille $(u_1, \ldots, u_p)$ est liée et cherchons à exprimer certains de ses vecteurs comme combinaisons linéaires des autres. Le système $\lambda_1 \cdot u_1 + \ldots + \lambda_p \cdot u_p = 0_E$ d'inconnues $(\lambda_1, \ldots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^p$ étant indéterminé, on exprime les inconnues principales en fonction des inconnues secondaires. Puis, pour chaque inconnue secondaire λ_i,

1. *On pose $\lambda_i = 1$ et les autres inconnues secondaires $= 0$. On en déduit ensuite les valeurs des inconnues principales.*
2. *On remplace alors $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ par leurs valeurs dans le système $\lambda_1 \cdot u_1 + \ldots + \lambda_p \cdot u_p = 0_E$.*
3. *On en déduit une expression de u_i comme combinaison linéaire des autres vecteurs.*

On peut ainsi exprimer chaque vecteur u_i associé à une inconnue secondaire λ_i comme combinaison linéaire des vecteurs associés aux inconnues principales.

Exercice. On considère les vecteurs de $\mathbb{R}^3$ suivants :

$$u_1 = (2,3,-1), \qquad u_2 = (1,-1,-2), \qquad u_3 = (3,7,0), \qquad u_4 = (5,0,-7).$$

1. Monter que la famille (u_1, u_2, u_3, u_4) est liée.

2. En déduire les expressions de u_3 et u_4 comme combinaisons linéaires de u_1 et u_2.

Propriété 4 (Cas des familles de un ou deux vecteurs)

(1) Une famille d'un seul vecteur non nul est libre.

(2) Une famille de deux vecteurs non colinéaires est libre.

Attention.
Le point (2) de la propriété précédente ne se généralise pas à trois vecteurs ou plus. Par exemple, les vecteurs $(-1, 1, 0)$, $(0, -1, 1)$ et $(1, 0, -1)$ sont deux à deux non colinéaires, et pourtant ils forment une famille liée puisque :

$$(-1, 1, 0) + (0, -1, 1) + (1, 0, -1) = (0, 0, 0).$$

Propriété 5 (Cas des polynômes, des matrices colonnes et des n-uplets)

(1) Une famille de polynômes non nuls dont les degrés sont deux à deux distincts est libre.

(2) Une famille de matrices colonnes ou de n-uplets échelonnée est libre.

Exemples.

1. $(1, X+1, X^3 - X)$ est une famille de polynômes non nuls de degrés deux à deux distincts donc elle est libre.
2. $\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right)$ est une famille de matrices colonnes échelonnée donc elle est libre.

2.3 Bases

Définition.

Une famille $(e_1, \ldots, e_n)$ de vecteurs d'un espace vectoriel E est une **base** de E si et seulement si elle est **libre** et **génératrice**.

Propriété 6 (Caractérisation des bases)

Une famille $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ est une base de E si et seulement si tout vecteur de E peut s'écrire de manière unique comme combinaison linéaire de $(e_1, \ldots, e_n)$, c'est-à-dire :

$$\forall u \in E,\ \exists!(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n,\ u = \lambda_1 \cdot e_1 + \ldots + \lambda_n \cdot e_n.$$

Les scalaires du n-uplet $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ sont appelés les **coordonnées** de u dans la base $\mathscr{B}$.

Preuve.

□

Exemples.

- **Base canonique de $\mathbb{R}^n$:**

  Dans $\mathbb{R}^n$, on pose :

  $$e_1 = (1, 0, \ldots, 0), \quad e_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0), \quad \ldots \quad , \quad e_n = (0, \ldots, 0, 1).$$

  La famille $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base de $\mathbb{R}^n$, dite base canonique de $\mathbb{R}^n$.

- **Base canonique de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$:**
  Pour tout $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq p$, on note $E_{i,j}$ la matrice élémentaire dont tous les coefficients sont nulles sauf un 1 en position (i,j) :
$$E_{i,j} = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} & & j & & \\ & & \downarrow & & \end{array} \\ i \to & \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$
  La famille $(E_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq p}}$ est une base de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, dite base canonique de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

- **Base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$:**
  La famille $(1, X, X^2, \ldots, X^n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$, dite base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.

Méthode.

Pour déterminer une base d'un sous-espace vectoriel F :

1. *On le met sous la forme $F = Vect(u_1, \ldots, u_p)$ et $(u_1, \ldots, u_p)$ est une famille génératrice de F.*
2. *On teste si les vecteurs $u_1, \ldots, u_p$ sont linéairement indépendants. Deux cas possibles :*
   - *Si ces vecteurs ne sont pas linéairement indépendants, on exprime certains vecteurs en fonction des autres. On peut donc les supprimer et la famille reste génératrice. On recommence ensuite le processus jusqu'à ce que les vecteurs soient linéairement indépendants.*
   - *Si ces vecteurs sont linéairement indépendants, la famille est libre et génératrice. C'est donc une base de F.*

Exercice.

1. Déterminer une base du sous-espace vectoriel $F = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 3y + 2z = 0\big\}$.

2. Montrer que le vecteur $(4,2,1)$ appartient à F et déterminer ses coordonnées dans la base obtenue à la question précédente.

3 Espaces vectoriels de dimension finie

3.1 Dimension d'un espace vectoriel

Définition.

Un espace vectoriel E est dit de **dimension finie** si E admet une base constituée d'un nombre fini de vecteurs.

Théorème 7 (Dimension d'un espace vectoriel)

Si un espace vectoriel E admet une base finie $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$, alors toutes les bases de E ont le même nombre n de vecteurs. On dit alors que n est la **dimension** de E qu'on notera $\dim(E)$.

Exemples.

1. Par convention, l'espace vectoriel $\{0_E\}$ est de dimension nulle, c'est-à-dire que $\dim(\{0_E\}) = 0$.
2. $\mathbb{R}^n$, $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, $\mathbb{R}_n[X]$ sont de dimension finie et on a :
$$\dim(\mathbb{R}^n) = n, \qquad \dim(\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})) = n \times p, \qquad \dim(\mathbb{R}_n[X]) = n + 1.$$
3. $\mathbb{R}[X]$, $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $\mathscr{F}(A, \mathbb{R})$ n'admettent pas de base finie. On dit qu'ils sont de dimension infinie.

Théorème 8 (Cardinal d'une famille libre ou génératrice)

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n. Alors :

(1) Toute famille libre de E est de cardinal inférieur ou égal à n.
Une famille libre de E de cardinal n est une base de E.

(2) Toute famille génératrice de E est de cardinal supérieur ou égal à n.
Une famille génératrice de E de cardinal n est une base de E.

Méthode.

Il est souvent pénible d'établir qu'une famille est génératrice, alors que la liberté est souvent plus simple à montrer. Aussi, lorsqu'il s'agit de prouver qu'une famille est une base d'un espace vectoriel E dont on connait la dimension, on montrera qu'elle est libre et contient $\dim(E)$ vecteurs.

Exercice. Dans $\mathbb{R}^3$, on pose $e_1 = (0, 1, 1)$, $e_2 = (1, 0, 1)$, $e_3 = (1, 1, 0)$.

1. Montrer que (e_1, e_2, e_3) est une base de $\mathbb{R}^3$.

2. Préciser les coordonnées du vecteur $u = (3, -1, 2)$ dans la base (e_1, e_2, e_3).

Propriété 9 (Dimension d'un sous-espace vectoriel)

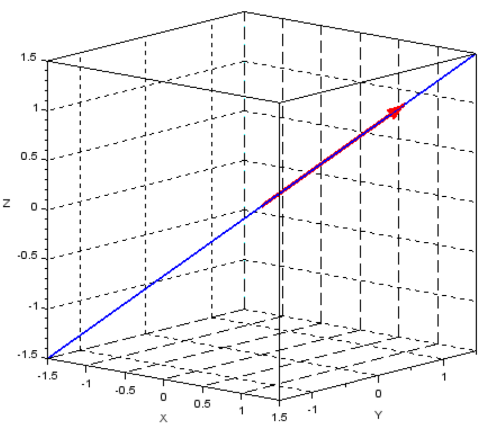
Soit E un espace vectoriel de dimension finie, et F un sous-espace vectoriel de E. Alors :

(1) F est de dimension finie et $\dim(F) \leq \dim(E)$.

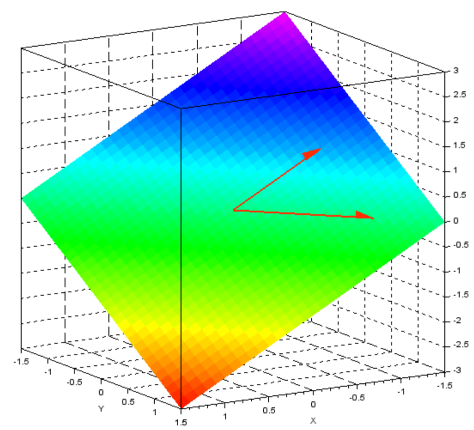
(2) Si $\dim(F) = \dim(E)$, alors $F = E$.

Remarque. Si F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$, alors on est dans l'un des cas suivants :

- $\dim(F) = 0$, et alors $F = \{0_E\}$;
- $\dim(F) = 1$, et alors F est une droite vectorielle ;
- $\dim(F) = 2$, et alors F est un plan vectoriel ;
- $\dim(F) = 3$, et alors $F = \mathbb{R}^3$.



Sous-espace vectoriel de dimension 1, dont une base est constituée du vecteur en rouge.



Sous-espace vectoriel de dimension 2, dont une base est constituée des deux vecteurs en rouge.

Méthode.

Pour prouver que deux sous-espaces vectoriels sont égaux, on utilise l'une des méthodes suivantes :

- *par double inclusion (avec souvent une inclusion plus compliquée à démontrer),*
- *que l'un est inclus dans l'autre et qu'ils ont même dimension.*

3.2 Matrice des coordonnées dans une base

Pour systématiser les calculs dans les espaces vectoriels de dimension finie, nous allons représenter les vecteurs d'un espace vectoriel par une matrice colonne. Nous pourrons ainsi interpréter tout problème d'espace vectoriel en calcul matriciel.

Matrice d'une famille de vecteurs dans une base

Définition.

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n et $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E.

- Soit $u \in E$ et $(m_1, \ldots, m_n)$ les coordonnées de u dans la base $\mathscr{B}$, c'est-à-dire l'unique n-uplet de scalaires tel que :
$$u = m_1 \cdot e_1 + \ldots + m_n \cdot e_n.$$
On appelle **matrice des coordonnées** de u dans la base $\mathscr{B}$ la matrice colonne notée $M_{\mathscr{B}}(u)$ de ces coefficients dans la base $\mathscr{B}$:
$$M_{\mathscr{B}}(u) = \begin{pmatrix} m_1 \\ \vdots \\ m_n \end{pmatrix}.$$

- Soit $\mathscr{F} = (u_1, \ldots, u_p) \in E^p$ une famille de vecteurs de E.
On appelle **matrice de la famille** $(u_1, \ldots, u_p)$ dans la base $\mathscr{B}$ et on note $M_{\mathscr{B}}(\mathscr{F}) = M_{\mathscr{B}}(u_1, \ldots, u_p)$ la matrice de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ donc la j-ème colonne est $M_{\mathscr{B}}(u_j)$:
$$M_{\mathscr{B}}(\mathscr{F}) = \begin{array}{c} \\ e_1 \rightarrow \\ e_2 \rightarrow \\ \vdots \\ e_n \rightarrow \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} u_1 & \cdots & u_j & \cdots & u_p \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \end{array} \\ \begin{pmatrix} m_{1,1} & \cdots & m_{1,j} & \cdots & m_{1,p} \\ m_{2,1} & \cdots & m_{2,j} & \cdots & m_{2,p} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ m_{n,1} & \cdots & m_{n,j} & \cdots & m_{n,p} \end{pmatrix} \end{array} \quad \text{où} \quad \forall j \in [\![1,p]\!],\ u_j = \sum_{i=1}^{n} m_{i,j} \cdot e_i.$$

Exercice.

1. Écrire la matrice des coordonnées du vecteur $u = (2, 0, 4)$ dans la base $\mathscr{B} = ((0, 1, 1), (1, 0, 1), (1, 1, 0))$ de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$.

2. Écrire la matrice des polynômes $P_i(X) = (X + 1)^i$ pour tout $0 \leq i \leq n$ dans la base canonique $\mathscr{B} = (1, X, \ldots, X^n)$ de $\mathbb{R}_n[X]$.

Matrices de passage

Définition.

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n, $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ (ancienne base) et $\mathscr{B}' = (e'_1, \dots, e'_n)$ (nouvelle base) deux bases de E.
On appelle **matrice de passage** de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$ et on note $P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}$ la matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ définie par :

$$P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'} = M_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}') = \begin{array}{c} \\ e_1 \to \\ e_2 \to \\ \vdots \\ e_n \to \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} e'_1 & \cdots & e'_j & \cdots & e'_n \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \end{array} \\ \begin{pmatrix} p_{1,1} & \cdots & p_{1,j} & \cdots & p_{1,n} \\ p_{2,1} & \cdots & p_{2,j} & \cdots & p_{2,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ p_{n,1} & \cdots & p_{n,j} & \cdots & p_{n,n} \end{pmatrix} \end{array} \quad \text{où} \quad \forall j \in [\![1, n]\!],\ e'_j = \sum_{i=1}^{n} p_{i,j} \cdot e_i.$$

Propriété 10 (Matrices de passage)

Soit E un espace vectoriel de dimension finie.

(1) Si $\mathscr{B}, \mathscr{B}'$ et $\mathscr{B}''$ sont trois bases de E, alors :

$$P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'} \times P_{\mathscr{B}',\mathscr{B}''} = P_{\mathscr{B},\mathscr{B}''}.$$

(2) Si $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ sont deux bases de E, alors $P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}$ est inversible et on a :

$$(P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'})^{-1} = P_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}.$$

Exercice. Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$, on considère $\mathscr{B}$ la base canonique, $\mathscr{B}'$ la base $((1,1,1),(1,1,0),(1,0,0))$, et $\mathscr{B}''$ la base $((1,1,0),(1,0,1),(0,1,1))$.

1. Déterminer les matrices de passage $P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}$, $P_{\mathscr{B}',\mathscr{B}''}$ et $P_{\mathscr{B},\mathscr{B}''}$ puis vérifier que $P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'} \times P_{\mathscr{B}',\mathscr{B}''} = P_{\mathscr{B},\mathscr{B}''}$.

2. Déterminer la matrice de passage $P_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}$ puis vérifier que $(P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'})^{-1} = P_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}$.

Changement de bases

Propriété 11 (Changement de bases)

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et soient $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ deux bases de E.

1. Pour tout vecteur $u \in E$, on a :

$$M_{\mathscr{B}'}(u) = P_{\mathscr{B}',\mathscr{B}} M_{\mathscr{B}}(u).$$

2. Pour toute famille $\mathscr{F}$ de vecteurs de E, on a :

$$M_{\mathscr{B}'}(\mathscr{F}) = P_{\mathscr{B}',\mathscr{B}} M_{\mathscr{B}}(\mathscr{F}).$$

Exercice. Déterminer les coordonnées de $u = (-2, 5, -6)$ dans la base $\mathscr{B}' = ((1,1,1),(1,1,0),(1,0,0))$ et dans la base $\mathscr{B}'' = ((1,1,0),(1,0,1),(0,1,1))$.

3.3 Rang d'une famille de vecteurs

Définition.

Soit E un espace vectoriel et $(u_1, \dots, u_p)$ une famille de vecteurs de E.
On appelle **rang** de $(u_1, \dots, u_p)$ et on note $\text{rg}(u_1, \dots, u_p)$ la dimension du sous-espace vectoriel de E engendré par $(u_1, \dots, u_p)$:

$$\text{rg}(u_1, \dots, u_p) = \dim\left(\text{Vect}(u_1, \dots, u_p)\right).$$

Propriété 12 (Rang d'une famille de vecteurs)

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n et $(u_1, \dots, u_p) \in E^p$.

(1) $\text{rg}(u_1, \dots, u_p) \leq \min(p, n)$.

(2) La famille $(u_1, \dots, u_p)$ est libre si et seulement si $\text{rg}(u_1, \dots, u_p) = p$.

(3) La famille $(u_1, \dots, u_p)$ est génératrice si et seulement si $\text{rg}(u_1, \dots, u_p) = n$.

Exercice. Déterminer le rang de la famille $((1, -1, 1), (0, 0, 0), (1, 1, 1), (2, 0, 2))$.

Propriété 13 (Rang de la matrice d'une famille de vecteurs dans une base)

Si $\mathscr{F} = (u_1, \dots, u_p)$ est une famille de vecteurs d'un espace vectoriel E de dimension finie et si $\mathscr{B}$ est une base de E, alors le rang de $\mathscr{F}$ est égal au rang de la matrice $M_{\mathscr{B}}(\mathscr{F})$.

Méthode.

Pour déterminer le rang d'une famille $\mathscr{F} = (u_1, \dots, u_p)$ de vecteurs d'un espace vectoriel E de dimension finie, et pour extraire de $\mathscr{F}$ une base de Vect$(\mathscr{F})$, on procèdera ainsi :

1. *On écrit la matrice de $\mathscr{F}$ dans une base $\mathscr{B}$ de E.*

2. *On se ramène à une matrice échelonnée par opérations élémentaires sur les lignes :*

$$\begin{pmatrix} m'_{1,j_1} & \cdots & & & & \\ 0 & & m'_{2,j_2} & \cdots & & \\ & & 0 & & & \\ & & & & m'_{r,j_r} & \cdots \\ & & & & 0 & 0 \\ 0 & & & & & 0 \end{pmatrix}.$$

3. *Le rang de $\mathscr{F}$ est égal à r, le nombre de pivots non nuls dans la matrice échelonnée par lignes.*

4. *La sous-famille $(u_{j_1}, \dots, u_{j_r})$, dont les vecteurs correspondent aux colonnes des pivots (inconnues principales), est libre de cardinal $r = rg(\mathscr{F})$.*

Exercice. Soient $u_1 = (1, -1, 1), u_2 = (-1, 1, -1), u_3 = (0, 1, 1), u_4 = (1, 0, 2)$. Déterminer le rang de la famille $\mathscr{F} = (u_1, u_2, u_3, u_4)$, ainsi qu'une base de $\mathrm{Vect}(\mathscr{F})$.

Propriété 14 (Caractérisation des bases d'un espace vectoriel de dimension finie)

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n et $\mathscr{B}$ une base de E.

$$\mathscr{F} = (u_1, \dots, u_n) \text{ est une base de } E \qquad \Leftrightarrow \qquad M_{\mathscr{B}}(\mathscr{F}) \text{ est inversible.}$$

Méthode.

Pour montrer qu'une famille $\mathscr{F} = (u_1, \dots, u_n)$ est une base d'un espace vectoriel E de dimension n, on pourra procéder ainsi :

1. *On écrit la matrice $\mathscr{F}$ dans la base $\mathscr{B}$ de E.*
2. *On montre que la matrice $M_{\mathscr{B}}(\mathscr{F})$ est de rang n (et donc inversible) à l'aide du pivot de Gauss.*