DM 1

A rendre le Vendredi 13 Septembre

Exercice 1

On considère la fonction f définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f(x) = x^2 - x\ln(x) - 1 \quad \text{et} \quad f(0) = -1,$$

ainsi que la fonction φ définie par : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \varphi(x) = \dfrac{2}{x} + \ln(x)$

On donne le tableau de valeurs de f :

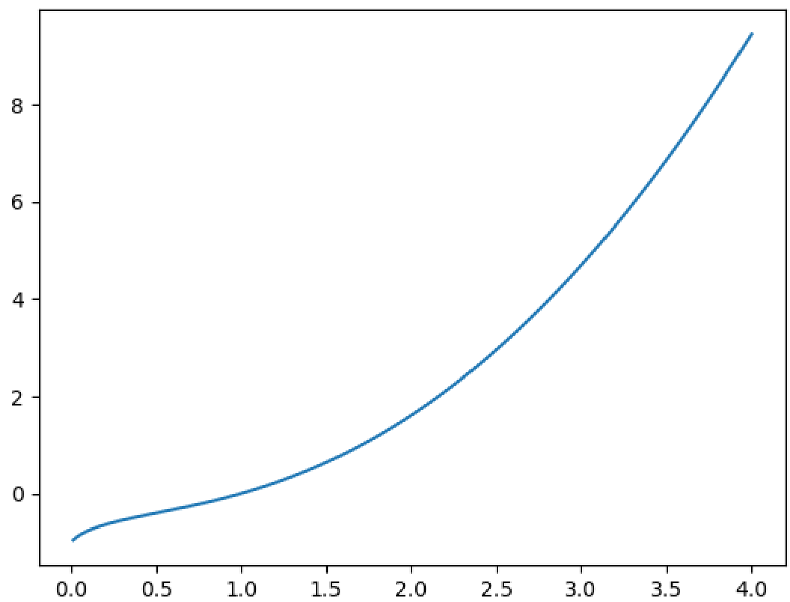
$x =$	$0,5$	1	$1,5$	2	$2,5$	3	$3,5$	4
$f(x) \simeq$	$-0,4$	0	$0,6$	$1,6$	3	$4,7$	$6,9$	$9,5$

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}_+$.
2. Montrer que la courbe de f admet un demi-tangente à droite en 0 et donner l'allure de la courbe de f au voisinage de 0.
3. Étudier la convexité de f sur $\mathbb{R}_+^*$, puis dresser son tableau de variation en précisant la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers l'infini.
4. Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ sur un intervalle J que l'on précisera.
5. Quel est le sens de variation de f^{-1} ? Dresser le tableau de variation de f^{-1}.
6. (a) On considère le programme en `Python` suivant :

```python
x = np.linspace(0.01,4, 400)
y = [t**2 - t*np.log(t)-1 for t in x]
plt.plot(x,y)
plt.show()
```

   Que crée la commande `x = np.linspace(0.01,4, 400)` ? Que fait ce programme ?

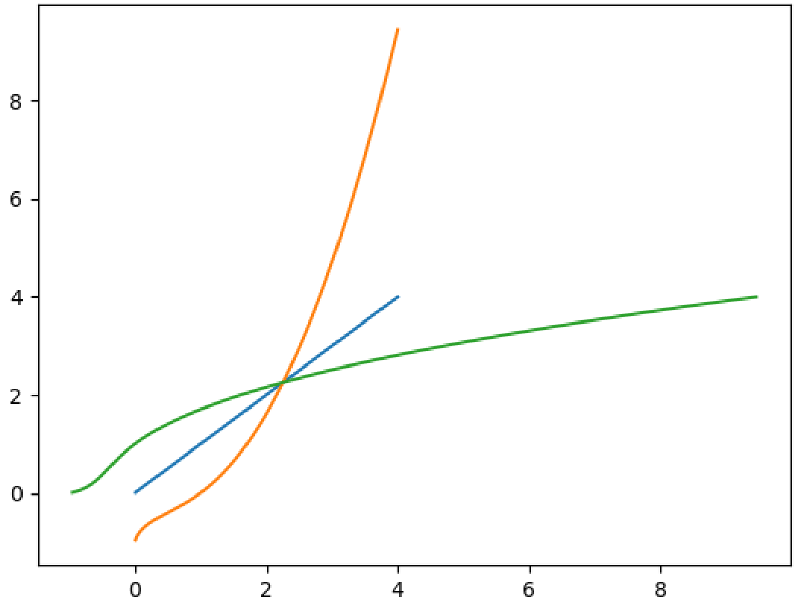
   (b) Une fois exécuté, le programme affiche le graphique suivant :



   Expliquer en quoi le graphique illustre les réponses aux questions 1., 2. et 3. de l'exercice.

(c) A la suite du programme précédent (et avant la dernière commande `plt.show()`), on rajoute les commandes `plt.plot(x,x)` puis `plt.plot(y,x)`.
Quelle fonction sera tracée grâce à la dernière instruction ?

(d) Le changement énoncé ci-dessus donne la courbe suivante :



Expliquer en quoi le graphique obtenu est cohérent.

7. Étude d'une suite implicite (x_k) :

(a) Justifier que pour tout entier naturel k, il existe un unique réel x_k positif tel que $f(x_k) = k$.

(b) Donner la valeur de x_0.

(c) Utiliser le tableau de valeurs de f pour déterminer un encadrement de x_1 et x_2 entre deux entiers consécutifs.

(d) Exprimer x_k à l'aide de f^{-1} puis justifier que la suite (x_k) est croissante et déterminer sa limite lorsque k tend vers l'infini.

8. Étude d'une suite récurrente (u_n) :

On définit la suite (u_n) par :

$$u_0 = \frac{3}{2} \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \varphi(u_n)$$

(a) Étudier les variations de φ sur $\mathbb{R}_+^*$.

(b) On donne $\varphi(\frac{3}{2}) \simeq 1,73$ et $\varphi(2) \simeq 1,69$. Montrer que : $\varphi\left(\left[\frac{3}{2};2\right]\right) \subset \left[\frac{3}{2};2\right]$.

(c) En étudiant les variations de φ', montrer que : $\forall x \in \left[\frac{3}{2};2\right], \quad |\varphi'(x)| \leqslant \frac{2}{9}$.

(d) Montrer que les équations $x = \varphi(x)$ et $f(x) = 1$ sont équivalentes. En déduire que le réel x_1 est l'unique solution de l'équation $x = \varphi(x)$.

(e) Montrer que pour tout entier naturel n : $\frac{3}{2} \leq u_n \leq 2$.

(f) Montrer que pour tout entier naturel n :

$$|u_{n+1} - x_1| \leq \frac{2}{9}\,|u_n - x_1|\,.$$

(g) En déduire que pour tout entier naturel n :

$$|u_n - x_1| \leq \left(\frac{2}{9}\right)^n.$$

(h) En déduire la limite de la suite (u_n).

(i) Déterminer un rang N tel que pour tout $n \geq N$, $|u_n - x_1| \leq 10^{-4}$.

(j) Compléter le programme `Python` suivant pour qu'il affiche u_N :

```python
def phi(x):
    return 2/x + np.log(x)

N = np.floor(-4*np.log(10)/np.log(2/9))+1
U = 3/2
for n in range(1,N+1) :
    U = .....

print('U = ', U)
```

Après avoir exécuté ce programme, on obtient le résultat suivant dans la console :

```
>>> U = 1.70644
```

Expliquer pourquoi on est certains que la valeur exacte de x_1 est comprise entre $1,70634$ et $1,70654$.

Exercice 2

Partie 1

On pose, pour tout entier n supérieur ou égal à 1, $v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

1. Montrer que : $\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{dt}{t}$.
2. En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad v_n \leq \ln(n) + 1$.

Partie 2

On considère une suite (u_n) définie par son premier terme $u_0 = 1$ et par la relation suivante, valable pour tout entier n : $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n}$.

3. (a) Montrer par récurrence que chaque terme de cette suite est parfaitement défini et strictement positif.

   (b) En déduire le sens de variation de la suite (u_n).

4. (a) Pour tout entier k, exprimer $u_{k+1}^2 - u_k^2$ en fonction de u_k^2.

   (b) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n^2 = 2n + 1 + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{u_k^2}$.

   (c) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n^2 \geq 2n + 1$. En déduire la limite de la suite (u_n).

5. (a) A l'aide du résultat précédent, montrer que : $\forall n \geq 2, \quad u_n^2 \leq 2n + 2 + \frac{1}{2} v_{n-1}$.

   (b) En utilisant la partie 1., établir que : $\forall n \geq 2, \quad u_n^2 \leq 2n + \frac{5}{2} + \frac{\ln(n-1)}{2}$.

(c) En déduire finalement que $u_n \sim \sqrt{2n}$ quand $n \to +\infty$.

Partie 3

6. Écrire un programme en `Python` permettant de calculer et d'afficher u_n, n étant un entier naturel entré par l'utilisateur.

7. (a) Écrire un deuxième programme, toujours en `Python`, qui permette de déterminer et d'afficher le plus petit entier naturel n pour lequel $u_n \geq 100$.
   (b) On donne $\ln(2) < 0,70$ et $\ln(5) < 1,61$. En déduire un majorant de $\ln(5000)$.
   (c) Montrer que l'entier n trouvé en 7.(a) est compris entre 4995 et 5000.

Exercice 3

1. (a) Montrer que pour tout $x > 0$: $x - \ln(x) > 0$
   (b) On pose alors :
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln(x)}{x - \ln(x)} & \text{si } x > 0, \\ -1 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$
   Déterminer l'ensemble de définition D de la fonction f.

2. (a) Montrer que f est continue sur D.
   (b) Montrer que f est dérivable (à droite) en 0 et que $f'_d(0) = 0$.

3. (a) Justifier que f est dérivable sur $D \setminus \{0\}$ et calculer $f'(x)$ pour tout x de $D \setminus \{0\}$.
   (b) Déterminer la limite de f en $+\infty$.
   (c) Dresser le tableau de variation de f.

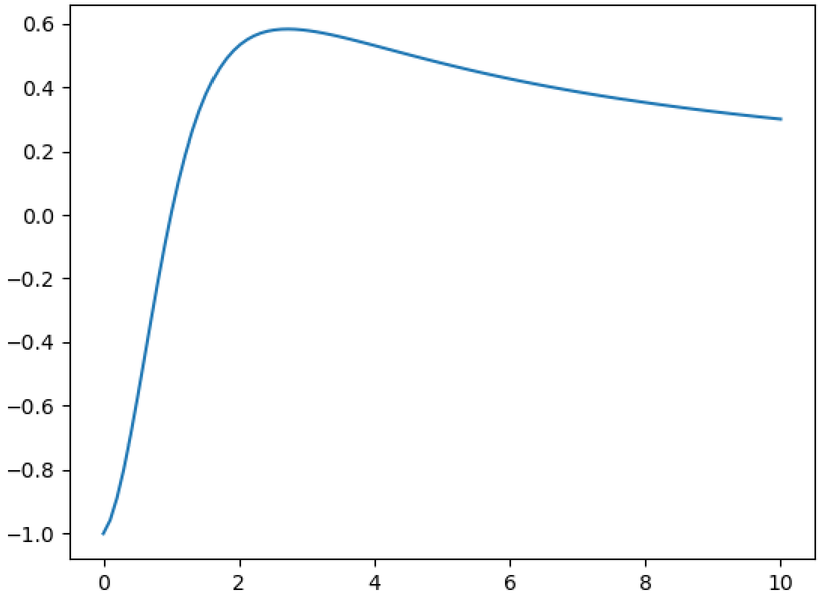
4. Étudier le signe de $f(x)$.

5. (a) Compléter le programme `Python` suivant qui trace une courbe approchée de celle de f sur le segment $[0, 10]$:

```python
def f(x) :
    if ..... :
        return -1
    else :
        return .....

x = np.arange(0,10,0.1)
y = [f(t) for t in x]
plt.plot(x,y)
plt.show()
```

On obtient le graphique :

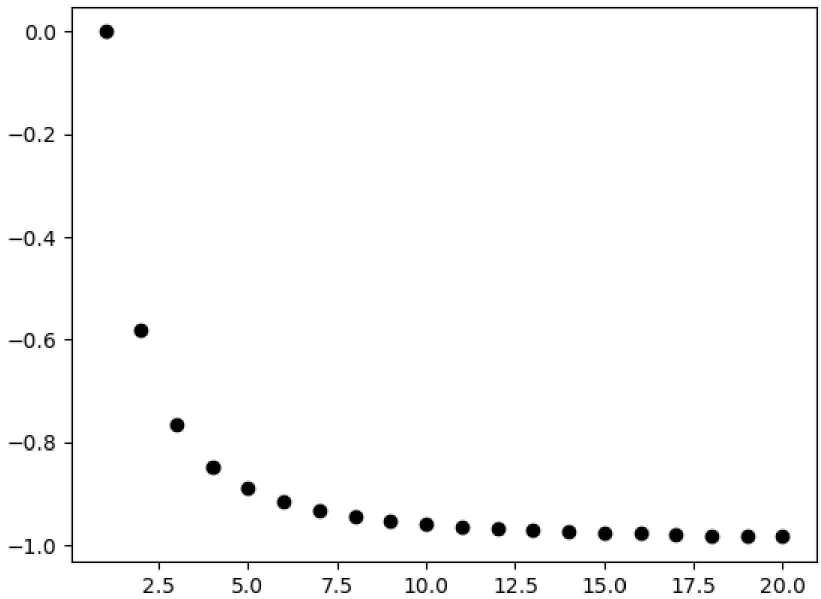


(b) Le réel $0,21$ fait-il partie des nombres renvoyées par la commande `x = np.arange(0,10,0.1)` ? Écrire une instruction `x =`, renvoyant les mêmes nombres que cette instruction mais utilisant la commande `np.linspace`.

(c) On exécute le programme suivant :

```
x = np.arange(1,21)
y = np.zeros(20)
for k in range(20) :
    y[k] = f(1/(k+1))
plt.plot(x,y,'ko')
plt.show()
```

On obtient le graphique :



Expliquer en quoi ce graphique est cohérent avec l'un des résultats de l'exercice.