DM 10

A rendre le Mardi 7 Janvier

Exercice 1

Le but de cet exercice est de calculer $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+t+t^n}dt$.

Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on pose $u_n=\int_0^1\frac{1}{1+t+t^n}dt$ et on a, en particulier, $u_0=\int_0^1\frac{1}{2+t}dt$.

1. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, justifier l'existence de u_n.
2. Calculer u_0 et u_1.
3. (a) Montrer que la suite (u_n) est croissante.
   (b) Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n\leq\ln(2)$.
   (c) En déduire que la suite (u_n) est convergente.
4. (a) Pour tout $n\in\mathbb{N}$, écrire $\ln(2)-u_n$ sous la forme d'une intégrale.
   (b) En déduire que : $\forall n\in\mathbb{N},\ \ln(2)-u_n\leq\frac{1}{n+1}$.
   (c) Donner la limite de la suite (u_n).
5. Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on pose $v_n=\int_1^{+\infty}\frac{1}{1+t+t^n}dt$.
   (a) Justifier la convergence de l'intégrale définissant v_n.
   (b) Montrer que : $\forall n\geq 2,\ 0\leq v_n\leq\frac{1}{n-1}$.
   (c) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty}v_n$, puis donner la valeur de $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+t+t^n}dt$.

Exercice 2

On note f la fonction définie, pour tout réel x strictement positif, par : $f(x)=\frac{e^{1/x}}{x^2}$.

1. (a) Pour tout entier naturel $n\geq 1$, montrer que l'intégrale $I_n=\int\limits_n^{+\infty}f(x)\,dx$ est convergente et exprimer I_n en fonction de n.
   (b) En déduire que $I_n\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{1}{n}$.
2. Montrer que la série de terme général $u_n=f(n)$ est convergente.
3. (a) Établir que : $\forall k\in\mathbb{N}^*,\ f(k+1)\leq\int\limits_k^{k+1}f(x)\,dx\leq f(k)$.
   (b) En sommant soigneusement cette dernière inégalité, montrer que :
   $$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \sum_{k=n+1}^{+\infty}u_k\leq I_n\leq\sum_{k=n+1}^{+\infty}u_k+\frac{e^{1/n}}{n^2}$$
   (c) Déduire des questions précédentes un équivalent simple, lorsque n est au voisinage de $+\infty$, de $\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty}\frac{e^{1/k}}{k^2}$.

4. On considère le programme suivant :

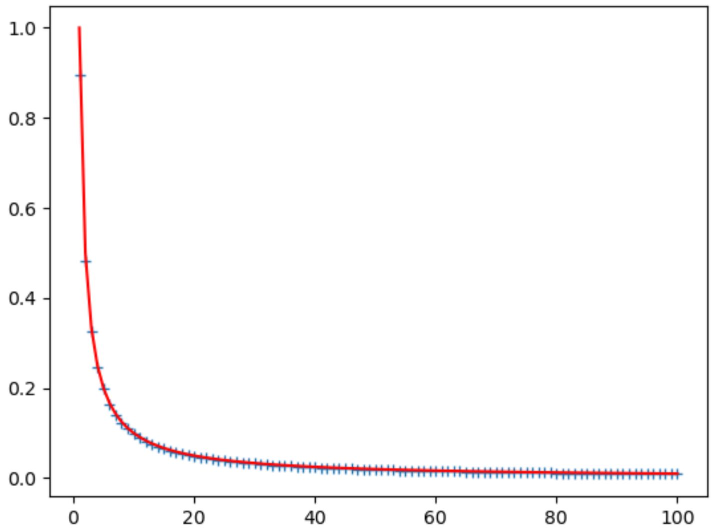
```
k = np.arange(1,1001)
U = np.exp(np.ones(1000)/k)/(k**2)
S = np.cumsum(U)
R = S[-1]*np.ones(1000) - S
plt.plot(k[0,100], R[0:100], '+')
plt.plot(k[0,100], np.ones(100)/k[0:100], color="red")
plt.show()
```

   (a) Donner la valeur mémorisée dans la colonne d'indice `n` de la matrice ligne `U`.

   (b) En déduire la somme mémorisée dans la colonne d'indice `n` de la matrice ligne `S`.

   (c) En déduire la somme mémorisée dans la colonne `n` de la matrice ligne `R`.

   (d) On exécute ce programme, on obtient le graphique :



   Quel résultat de l'exercice est illustré par ce graphique ?

Exercice 3

1. Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Donner la valeur de $\sum\limits_{k=0}^{n} x^k$ puis en dérivant des deux côtés l'égalité obtenue, montrer que :

$$\sum_{k=1}^{n} kx^{k-1} = \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(1-x)^2}.$$

On désigne par n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On note p un réel de $]0,1[$ et on pose $q = 1 - p$. On dispose d'une pièce donnant Pile avec la probabilité p et Face avec la probabilité q. On lance cette pièce et on arrête les lancers dans l'une des deux situations suivantes :

- Soit si l'on a obtenu "Pile" ;
- Soit si l'on a obtenu n fois "Face".

Pour tout entier naturel k non nul, on note P_k (respectivement F_k l'événement "on obtient Pile (respectivement Face) au k-ième lancer".

On note T_n le nombre de lancers effectués, X_n le nombre de Pile obtenus et enfin Y_n le nombre de Face obtenus.

On admet que T_n, X_n et Y_n sont des variables aléatoires toutes les trois définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ que l'on ne cherchera pas à préciser.

2. Loi de T_n.

   (a) Pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$, déterminer, en distinguant le cas $k = 1$, la probabilité $P(T_n = k)$.

   (b) Déterminer $P(T_n = n)$.

   (c) Vérifier que : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} P(T_n = k) = 1$.

   (d) Établir que T_n possède une espérance et vérifier que $E(T_n) = \dfrac{1-q^n}{1-q}$..

3. Loi de X_n.

   (a) Donner la loi de X_n.

   (b) Vérifier que $E(X_n) = 1 - q^n$.

4. Loi de Y_n .

   (a) Déterminer, pour tout k de $[\![0, n-1]\!]$, la probabilité $P(Y_n = k)$.

   (b) Déterminer $P(Y_n = n)$.

   (c) Écrire une égalité liant les variables aléatoires T_n, X_n et Y_n, puis en déduire $E(Y_n)$.

5. (a) Compléter les trois instructions manquantes pour que le programme `Python` suivant simule l'expérience aléatoire décrite ci-dessus et pour qu'il affiche, dans cet ordre, les valeurs prises par les variables aléatoires T_n , X_n et Y_n :

```python
def simul(n,p):
    t = 0
    x = 0
    y = 0
    while (x==0) and (t<n):
        t = .....
        if rd.random()>p:
            y = .....
        else:
            x = .....
        return [t, x, y]
```

   (b) On considère la fonction suivante :

```python
def loi_theorique(n, p):
    L = [p]
    for k in range(1,n-1):
        L.append((1-p)*L[-1])
    L.append(((1-p)/p)*L[-1])
    return L
```

   Pour tout $k \in [\![0, n-2]\!]$, donner la valeur p_k mémorisée dans la case `L[k]` de la liste `L`, puis donner la valeur p_{n-1} mémorisée dans `L[n-1]`.

   Cette fonction renvoie en sortie la loi d'une variable aléatoire. Laquelle ?

(c) On rajoute à la suite de ces fonctions le programme suivant :

```
n = 10
p = 1/3
T = []
for k in range(1000):
    [t, x, y] = simul(n,p)
    T.append(t)
E = [T.count(i) for i in range(1,11)]
print(E)
```

Après exécution, on obtient le résultat suivant :

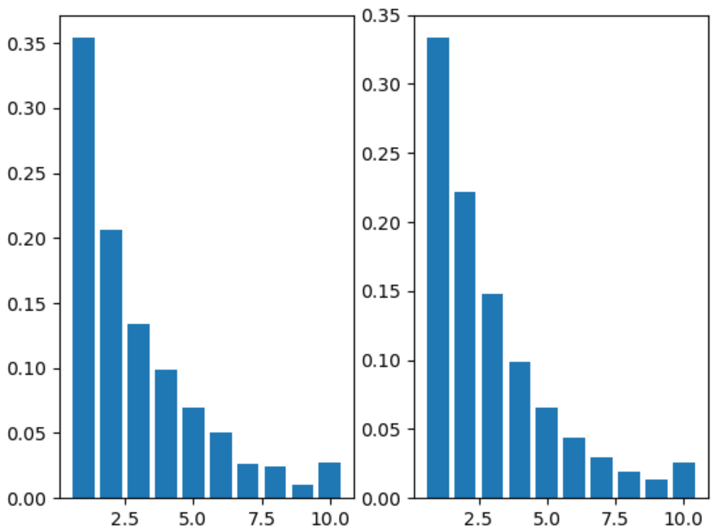
```
[320, 222, 156, 81, 73, 55, 26, 23, 19, 25]
```

Que fait ce programme ? Donner la valeur de la fréquence de l'évènement $[T_n = 5]$ obtenue pour ces 1000 simulations de T_n.

(d) On rajoute à la suite des instruction suivantes :

```
x = list(range(1,n+1))
f = [E[i]/1000 for i in range(10)]
plt.subplot(1, 2, 1)
plt.bar(x, f)
plt.subplot(1, 2, 2)
plt.bar(x, loi_theorique(n, p))
plt.show()
```

On obtient les 2 graphiques suivants :



Commenter les graphiques obtenus.