DM 11

A rendre le Mercredi 15 Janvier

Exercice 1

Dans cet exercice, on étudie des situations probabilistes liées à un jeu de dés à six faces.
Pour ce jeu, effectuer une partie consiste à lancer successivement deux dés équilibrés.
On note :

- D_1 le résultat du premier dé et D_2 le résultat du deuxième dé ;
- E_1 l'événement : $(D_1 < D_2)$, E_2 l'événement : $(D_1 = D_2)$ et E_3 l'événement : $(D_1 > D_2)$.

Lors d'une partie,

- si l'événement E_1 se produit alors le joueur ne marque pas de point,
- si l'événement E_2 se produit alors le joueur marque 2 points,
- si l'événement E_3 se produit alors le joueur marque 1 point.

Partie I - Étude de parties successives.

Soit n un entier naturel non nul. Le joueur joue successivement n parties.
Pour tout entier naturel $i \geq 1$, on note :

- X_i la variable aléatoire représentant le nombre de points marqués lors de la i-ième partie ;
- Y_i le nombre de points marqués après i parties.

1. Calculer la probabilité de chacun des événements E_1, E_2 et E_3.
2. Soit $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, déterminer la loi de la variable aléatoire X_i puis calculer son espérance et sa variance.
3. Trouver la loi de la variable aléatoire Y_1.
4. Quelle est la loi de la variable aléatoire Y_2 ?
5. (a) Préciser l'ensemble $Y_3(\Omega)$ des valeurs prises par la variable aléatoire Y_3.
   (b) Construire et remplir le tableau de la loi conjointe du couple (Y_2, Y_3).
   On justifiera précisément une valeur non nulle de ce tableau, les autres pouvant être données directement.
   (c) En déduire la loi de la variable aléatoire Y_3.
6. Écrire Y_n en fonction des variables aléatoires X_1, X_2, ..., X_n.
   En déduire l'espérance et la variance de Y_n.
7. (a) Recopier et compléter la fonction suivante qui simule un lancer de 2 dés (et mémorise le numéro des faces dans les variables d_1 et d_2) et renvoie en sortie le nombre x de points obtenus.

```
def simulX():
    d1 = .....
    d2 = .....
    if ..... :
        x = 0
    elif ..... :
        x = 2
    else:
        x = 1
    return(x)
```

(b) Recopier et compléter le programme (on fera appel à la fonction `simulX()`) afin qu'il simule 1000 fois l'expérience consistant à lancer 3 fois les 2 dés, à calculer $Y2$ et $Y3$ et à compléter un tableau N dont la i-ème ligne et la j-ième colonne contient le nombre de fois où l'évènement $(Y2 = i-1) \cap (Y3 = j-1)$ s'est réalisé au cours des 1000 expériences.

```
N = np.zeros((5,7))
for i in range(1000):
    Y2 = .....
    Y3 = .....
    N[Y2, Y3] = N[Y2, Y3]+1
```

(c) Rajouter des instructions pour afficher le tableau de la loi empirique du couple (Y_2, Y_3) sur 1000 simulations de l'expérience.

(d) On rappelle que le coefficient de corrélation linéaire du couple (Y_2, Y_3) est défini par :

$$\rho = \frac{Cov(Y_2, Y_3)}{\sigma(Y_2)\sigma(Y_3)}.$$

Il permet de vérifier s'il y a une relation affine entre Y_2 et Y_3 :

$$\rho = \pm 1 \text{ si et seulement si } Y_3 = aY_2 + b \text{ avec } a = \frac{Cov(Y_2, Y_3)}{V(Y_2)} \text{ et } b = E(Y_3) - aE(Y_2).$$

De plus, plus ρ est proche de -1 ou 1, plus la relation entre Y_2 et Y_3 est presque affine, à une erreur d'ajustement près.

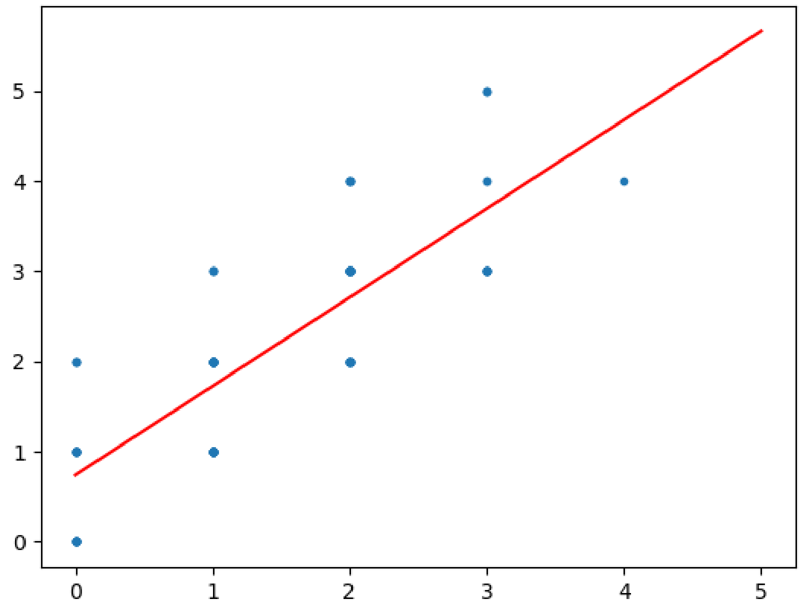
i. Établir une égalité faisant intervenir Y_3, Y_2 et X_3.
Y a-t-il une relation de dépendance affine entre Y_3 et Y_2 ?
On remarquera tout de même que la relation n'est "pas loin d'être affine", à une erreur près autour de $b = E(X_3)$.

ii. A la suite des programmes précédents, on ajoute le programme suivant :

```
Y2 = np.zeros(100)
Y3 = np.zeros(100)
for i in range(100):
    Y2[i] = simulX()+simulX()
    Y3[i] = Y2[i]+simulX()

plt.plot(Y2, Y3, ".")

c = np.mean(Y2*Y3)-np.mean(Y2)*np.mean(Y3)
v2 = np.var(Y2)
v3 = np.var(Y3)
cor = c/np.sqrt(v2*v3)
a = c/v2
b = np.mean(Y3)-a*np.mean(Y2)
print(cor, a, b)

x = np.linspace(0, 5, 10)
plt.plot(x, a*x+b, color="red")
plt.show()
```

Que calcule la variable `c` ? la variable `v2` ? la variable `cor` ?

iii. Après exécution, on obtient les valeurs : `cor = 0.80720247`, `a = 0.98526448` et `b = 0.73974512` et le graphique :



Commenter la cohérence des valeurs de `cor`, `a` et `b` ainsi que le graphique obtenu.

Partie II - Étude du temps d'attente.
Le joueur joue maintenant jusqu'à ce qu'il dépasse un nombre de points donné.
Plus précisément on note T_1 (respectivement T_2) la variable aléatoire représentant le nombre de parties effectuées par le joueur lorsque le total de ses points est supérieur ou égal à 1 (respectivement 2) pour la première fois (si cet événement se produit).
Par exemple si les points marqués par le joueur sont dans l'ordre :

- 0 0 1 0 1 2 . . . .. alors $T_1 = 3$ et $T_2 = 5$.
- 0 0 0 2 1 2.... alors $T_1 = 4$ et $T_2 = 4$.

8. (a) Préciser l'ensemble $T_1(\Omega)$ des valeurs prises par la variable aléatoire T_1 puis, pour tout k appartenant à $T_1(\Omega)$, donner la valeur de la probabilité $P(T_1 = k)$.
   (b) Donner la valeur de l'espérance et de la variance de la variable aléatoire T_1.

9. (a) Déterminer l'ensemble $T_2(\Omega)$ des valeurs prises par la variable aléatoire T_2.
   (b) Calculer les probabilités $P(T_2 = 1)$ et $P(T_2 = 2)$.
   (c) Prouver que, pour $k \geq 3$, on a :
   $$P(T_2 = k) = \left(\frac{5}{12}\right)^{k-1} \times \frac{1}{6} + (k-1)\left(\frac{5}{12}\right)^{k-1} \times \frac{7}{12}.$$
   (d) Ce résultat est-il valable pour $k = 1$ et $k = 2$?
   (e) Établir que : $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \mathrm{P}(T_2 = k) = 1$.
   (f) Que peut-on en déduire pour l'événement "le joueur n'obtient jamais un score cumulé supérieur ou égal à 2" ?
   (g) Calculer $E(T_2)$.

Exercice 2

On note $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'application définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{e^x - 1} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Partie I : Étude d'une fonction

1. (a) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.
   (b) Justifier que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]-\infty;0[$ et sur $]0;+\infty[$ et calculer $f'(x)$ pour tout réel x non nul.
   (c) Montrer : $f'(x) \underset{x\to 0}{\to} -\dfrac{1}{2}$.
   (d) Montrer que f est dérivable en 0 et donner la valeur de $f'(0)$.
   (e) Établir que f est de classe $\mathscr{C}^1$.

2. (a) Étudier les variations de l'application $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par :

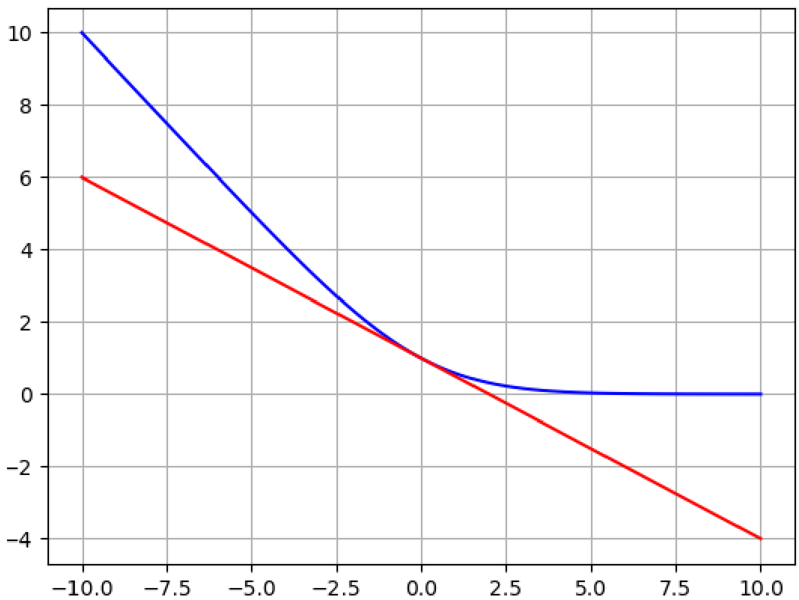
$$u(x) = (1-x)\,e^x - 1$$

   (b) Montrer : $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) < 0$.
   (c) Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
   Dresser le tableau des variations de f.

3. On exécute le programme suivant :

```python
def f(x):
    if x==0:
        y = 1
    else:
        y = x/(np.exp(x)-1)
    return(y)

x = np.linspace(-10, 10, 100)
y = f(x)
z = 1-1/2*x
plt.plot(x, y, color="blue")
plt.plot(x, z, color="red")
plt.grid(True)
plt.show()
```

On obtient le graphique :



Le nombre 0 fait-il partie de la liste des valeurs que contient le vecteur `x` ?

Vérifier et commenter la cohérence du graphique obtenu avec les résultats de la partie I.

Partie II : Étude d'une suite récurrente associée à la fonction f

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, définie par $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

4. Montrer que f admet un point fixe et un seul, noté α, que l'on calculera.

5. (a) Établir : $\forall x \in [0; +\infty[\,,\ e^{2x} - 2x\ e^x - 1 \geq 0$.

   (b) Montrer : $\forall x \in]0; +\infty[\,,\ f'(x) + \dfrac{1}{2} = \dfrac{e^{2x} - 2x\ e^x - 1}{2(e^x - 1)^2}$.

   (c) Montrer : $\forall x \in [0; +\infty[\,,\ -\dfrac{1}{2} \leq f'(x) < 0$.

   (d) Établir : $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_{n+1} - \alpha| \leq \dfrac{1}{2}|u_n - \alpha|$.

6. En déduire : $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n - \alpha| \leq \dfrac{1}{2^n}(1 - \alpha)$.

7. Conclure que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers α.

8. Écrire un programme en `Python` qui calcule et affiche le plus petit entier naturel n tel que $|u_n - \alpha| < 10^{-9}$

Partie III : Étude d'une fonction définie par une intégrale

On note $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'application définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par :

$$G(x) = \int_x^{2x} f(t)\, dt$$

9. Soit F une primitive de f sur $\mathbb{R}$. Justifier que F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et exprimer $G(x)$ en fonction de $F(2x)$ et $F(x)$.

   En déduire que G est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et, en dérivant l'égalité obtenue, que, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$G'(x) = \begin{cases} \dfrac{x(3 - e^x)}{e^{2x} - 1} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

10. (a) Justifier l'encadrement : $\forall x \in [0; +\infty[, \forall t \in [x; 2x], 0 \leq f(t) \leq f(x)$.
    En intégrant ces inégalités sur t allant de x à $2x$, montrer :

$$\forall x \in [0; +\infty[\,,\ 0 \leq G(x) \leq x\ f(x)\,.$$

    En déduire la limite de G en $+\infty$.

    (b) Par un raisonnement similaire montrer : $\forall x \in]-\infty; 0]\,,\ G(x) \leq x\ f(x)\,.$
    Attention, lorsqu'on intègre sur des bornes décroissantes, on change le sens de l'inégalité !
    En déduire la limite de G en $-\infty$.

11. Dresser le tableau des variations de G. *On n'essaiera pas de calculer* $G(\ln(3))$.