

A rendre le Vendredi 24 Janvier

Exercice 1

1. Étude préliminaire

On admet, pour tout entier k et pour tout $x \in [0, 1[$ que la série $\sum_{n \geq k} \binom{n}{k} x^n$ est convergente et

on note $s_k(x) = \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} x^n$.

(a) Vérifier, pour tout réel $x \in [0, 1[$:

$$s_0(x) = \frac{1}{1-x} \quad \text{et} \quad s_1(x) = \frac{x}{(1-x)^2}.$$

(b) Pour tout couple d'entiers naturels (n, k) tels que $n < k$, montrer :

$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$$

(c) Pour tout entier naturel k et pour tout réel x de $[0, 1[$, déduire de la question précédente :

$$s_{k+1}(x) = x s_k(x) + x s_{k+1}(x)$$

(d) Montrer par récurrence :

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad \forall x \in [0, 1[\quad s_k(x) = \frac{x^k}{(1-x)^{k+1}}.$$

2. Étude d'une expérience aléatoire

On considère une urne contenant une boule noire et quatre boules blanches. On effectue l'expérience aléatoire suivante :

- On commence par tirer des boules de l'urne une à une avec remise jusqu'à obtenir la boule noire (que l'on remet aussi dans l'urne).
On définit la variable aléatoire N égale au nombre de tirages avec remise nécessaires pour obtenir la boule noire.
- Puis, si N prend une valeur entière positive non nulle notée n , on réalise alors une seconde série de n tirages dans l'urne, toujours avec remise.
On définit la variable aléatoire X égale au nombre de fois où la boule noire a été obtenue dans cette seconde série de tirages.

(a) Déterminer la loi de la variable aléatoire N . Donner son espérance .

(b) Soient $k \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer la probabilité conditionnelle $P_{N=n}(X = k)$.

(c) Vérifier que : $P(X = 0) = \frac{4}{9}$.

(d) En utilisant l'étude préliminaire, montrer :

$$\forall k \in \mathbb{N}^* \quad P(X = k) = \frac{25}{36} \left(\frac{4}{9}\right)^k.$$

(e) Montrer que X admet une espérance $E(X)$ et calculer $E(X)$.

(f) Montrer : $\forall k \in \mathbb{N}, P(X \leq k) = 1 - \frac{5}{9} \left(\frac{4}{9}\right)^k$.

(g) Écrire en Python une fonction `simulX()` qui simule une fois cette expérience et renvoie en sortie la valeur x prise par la variable X .

3. Étude d'une variable à densité

On note $a = -\frac{\ln(9) - \ln(5)}{\ln(9) - \ln(4)}$ et on définit la fonction F sur \mathbb{R} par

$$\begin{cases} F(x) = 1 - \frac{5}{9} \left(\frac{4}{9}\right)^x & \text{si } x \in [a, +\infty[\\ F(x) = 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On rappelle : $\forall x \in \mathbb{R} \quad \left(\frac{4}{9}\right)^x = e^{x \ln(\frac{4}{9})}$.

- (a) Montrer que F est la fonction de répartition d'une variable à densité, notée Y .
- (b) Déterminer une densité f de Y .
- (c) Déterminer une primitive de la fonction g définie par $g(x) = x e^{x \ln \frac{4}{9}}$.
- (d) Montrer que Y admet une espérance $E(Y)$ et calculer $E(Y)$.

Exercice 2

1. Montrer que l'intégrale $\int_x^{2x} \frac{1}{\sqrt{t^2 + 1}} dt$ est définie pour tout réel x .

On considère désormais la fonction f définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \int_x^{2x} \frac{1}{\sqrt{t^2 + 1}} dt$$

- 2. Établir que f est impaire.
- 3. (a) Montrer que f est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} .
(b) Déterminer $f'(x)$, pour tout réel x , et en déduire que f est strictement croissante sur \mathbb{R} .
- 4. (a) En utilisant la relation $t^2 \leq t^2 + 1 \leq t^2 + 2t + 1$, valable pour tout t positif ou nul, montrer que l'on a l'encadrement suivant :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \ln(2x + 1) - \ln(x + 1) \leq f(x) \leq \ln(2).$$

- (b) Donner alors la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.
- (c) Dresser le tableau de variation complet de f .
- (d) Résoudre l'équation $f(x) = 0$.
- 5. (a) Montrer que, pour tout réel x , on a : $x + \sqrt{x^2 + 1} > 0$.
(b) Déterminer la dérivée de la fonction $h(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$.
(c) En déduire une expression explicite de $f(x)$.
- 6. Recherche d'un équivalent de $f(x)$ lorsque x est au voisinage de 0.
(a) Établir que, pour tout réel x strictement positif, on a :

$$x - f(x) = \int_x^{2x} \frac{t^2}{\sqrt{t^2 + 1} (1 + \sqrt{t^2 + 1})} dt.$$

(b) En déduire :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, 0 \leq x - f(x) \leq \frac{7}{6}x^3.$$

(c) Conclure que : $f(x) \underset{0^+}{\sim} x$.

(d) Montrer que l'on a aussi : $f(x) \underset{0^-}{\sim} x$.

Exercice 3

On considère l'application φ définie sur \mathbb{R}_+^* par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \varphi(x) = \ln(x) - \ln(x+1) + \frac{1}{x}.$$

I. Résolution de l'équation $\varphi(x) = 1$.

- Déterminer la limite de $\varphi(x)$ lorsque x tend vers 0 par valeurs positives.
Interpréter graphiquement cette limite.
- Déterminer la limite de $\varphi(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.
Interpréter graphiquement cette limite.
- Prouver que φ est strictement monotone sur \mathbb{R}_+^* .
- Dresser le tableau de variation de φ et y faire apparaître les limites de φ en 0^+ et $+\infty$.
- On rappelle que $\ln(2) \simeq 0,7$ et $\ln(3) \simeq 1,1$.
Montrer que l'équation $\varphi(x) = 1$ possède une unique solution notée α et que :

$$\frac{1}{3} < \alpha < \frac{1}{2}$$

- Écrire un programme en `Python` permettant d'encadrer α dans un intervalle d'amplitude 10^{-2} , par méthode de dichotomie.

II. Une variable à densité.

Soit α le réel défini à la question 5. On considère la variable aléatoire réelle X dont une densité de probabilité est donnée par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{1}{x^2(x+1)} & \text{si } x > \alpha \\ f(x) = 0 & \text{si } x \leq \alpha \end{cases}$$

- Vérifier que f est bien une densité de probabilité.
- Montrer que X admet une espérance $E(X)$.
- Démontrer que pour $x > \alpha$:

$$xf(x) = \varphi'(x) + \frac{1}{x^2}$$

En déduire que l'espérance de X est donnée par :

$$E(X) = \frac{1-\alpha}{\alpha}$$

Donner un encadrement de $E(X)$ par deux entiers consécutifs.

- La variable aléatoire réelle X admet-elle une variance ?