DM 3

A rendre le Mercredi 9 Octobre

Exercice 1

I. Puissances successives d'une matrice.

On considère la matrice

$$M(a) = \begin{pmatrix} 1-2a & a & a \\ a & 1-2a & a \\ a & a & 1-2a \end{pmatrix}$$

où a représente un nombre réel.

1. Montrer que, pour tous réels a et b, on a : $M(a) \times M(b) = M(a+b-3ab)$.
2. En déduire les valeurs de a pour lesquelles la matrice $M(a)$ est inversible et exprimer son inverse.
3. Déterminer le réel a_0 non nul, tel que :
$$[M(a_0)]^2 = M(a_0)$$
4. On considère les matrices :
$$P = M(a_0) \quad \text{et} \quad Q = I - P$$
où I désigne la matrice carrée unité d'ordre 3.
   (a) Montrer qu'il existe un réel α, qu'on exprimera en fonction de a, tel que :
$$M(a) = P + \alpha Q.$$
   (b) Calculer P^2, QP, PQ, Q^2.
   (c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, montrer que $[M(a)]^n$ s'écrit comme combinaison linéaire de P et Q.
   (d) Expliciter alors la matrice $[M(a)]^n$.
5. (a) Recopier et compléter la fonction suivante, qui prend en entrée le réel a et renvoie en sortie la matrice $M(a)$, en effectuant uniquement des combinaisons linéaires des matrices `np.ones((3,3))`, `np.eye(3,3)` et des matrices intermédiaires définies au cours du programme :

```python
def mat(a) :
    P = .....
    Q = .....
    M = .....
    return(M)
```

   (b) Quelle instruction doit-on alors taper dans la console pour que `Python` affiche la matrice $M(2)$?

II. Évolution d'un titre boursier au cours du temps.

Dans la suite de l'exercice, on suppose que $a \in \left]0, \frac{2}{3}\right[$.

1. On définit des suites $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $(q_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $(r_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par leur premier terme p_1, q_1, r_1, et les relations de récurrence :
$$\begin{cases} p_{n+1} = (1-2a)p_n + aq_n + ar_n \\ q_{n+1} = ap_n + (1-2a)q_n + ar_n \\ r_{n+1} = ap_n + aq_n + (1-2a)r_n \end{cases}$$

(a) Exprimer p_n, q_n, r_n en fonction de n, p_1, q_1, r_1.

(b) Étudier la convergence de ces suites.

2. Dans une bourse de valeurs, un titre donné peut monter, rester stable, ou baisser. Dans un modèle mathématique, on considère que :

- le premier jour le titre est stable ;
- si un jour n, le titre monte, le jour $n+1$, il montera avec la probabilité $\dfrac{2}{3}$, restera stable avec la probabilité $\dfrac{1}{6}$, et baissera avec la probabilité $\dfrac{1}{6}$;
- si un jour n, le titre est stable, le jour $n+1$, il montera avec la probabilité $\dfrac{1}{6}$, restera stable avec la probabilité $\dfrac{2}{3}$, et baissera avec la probabilité $\dfrac{1}{6}$;
- si un jour n, le titre baisse, le jour $n+1$, il montera avec la probabilité $\dfrac{1}{6}$, restera stable avec la probabilité $\dfrac{1}{6}$, et baissera avec la probabilité $\dfrac{2}{3}$.

On note M_n (respectivement S_n, respectivement B_n) l'évènement "le titre donné monte (respectivement reste stable, respectivement baisse) le jour n".

(a) Exprimer les probabilités de hausse, de stabilité, et de baisse au jour $n+1$ en fonction de ces mêmes probabilités au jour n.

(b) En déduire les probabilités de hausse, de stabilité, et de baisse au jour n.

(c) Quelles sont les limites de ces probabilités lorsque n tend vers l'infini ?

Exercice 2

Partie I : Diagonalisation simultanée de deux matrices.

On considère les matrices de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -3 & 3 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. (a) On admet que $B^3 - 5B^2 + 6B = 0$. Déterminer les valeurs propres de B.

   (b) Déterminer, pour chacune des valeurs propres de B, le sous-espace propre associé.

   (c) Prouver que B est diagonalisable et déterminer une matrice P inversible vérifiant les deux conditions suivantes :

   - La matrice $D_2 = P^{-1}BP$ est égale à $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$,
   - Les coefficients situés sur la première ligne de P sont 1, 1 et -1 (de gauche à droite).

2. (a) On note V_1, V_2 et V_3 les vecteurs correspondants aux colonnes de la matrice P obtenue à la question 1. Montrer que V_1, V_2 et V_3 sont des vecteurs propres de A et déterminer les valeurs propres associées.

   (b) En déduire que A est diagonalisable et donner la matrice diagonale $D_1 = P^{-1}AP$.

Partie II : Étude d'une suite de matrices.

Soit X_n la suite matricielle définie par $X_0 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $X_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$, et pour tout entier naturel n :

$$X_{n+2} = \frac{1}{6}AX_{n+1} + \frac{1}{6}BX_n.$$

Pour tout entier naturel n, on pose : $Y_n = P^{-1}X_n$.

3. (a) Démontrer que $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, puis calculer les matrices Y_0 et Y_1.

   (b) Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $Y_{n+2} = \frac{1}{6}D_1Y_{n+1} + \frac{1}{6}D_2Y_n$.

   (c) Pour tout entier naturel n, on note $Y_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$. Déduire de la question précédente que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \left\{ \begin{array}{rcl} a_{n+2} & = & \frac{1}{2}\, a_{n+1} + \frac{1}{2}\, a_n \\ b_{n+2} & = & \frac{1}{2}\, b_{n+1} \\ c_{n+2} & = & \frac{2}{3}\, c_{n+1} + \frac{1}{3}\, c_n \end{array} \right.$$

   (d) Expliciter a_n, b_n et c_n en fonction de n.

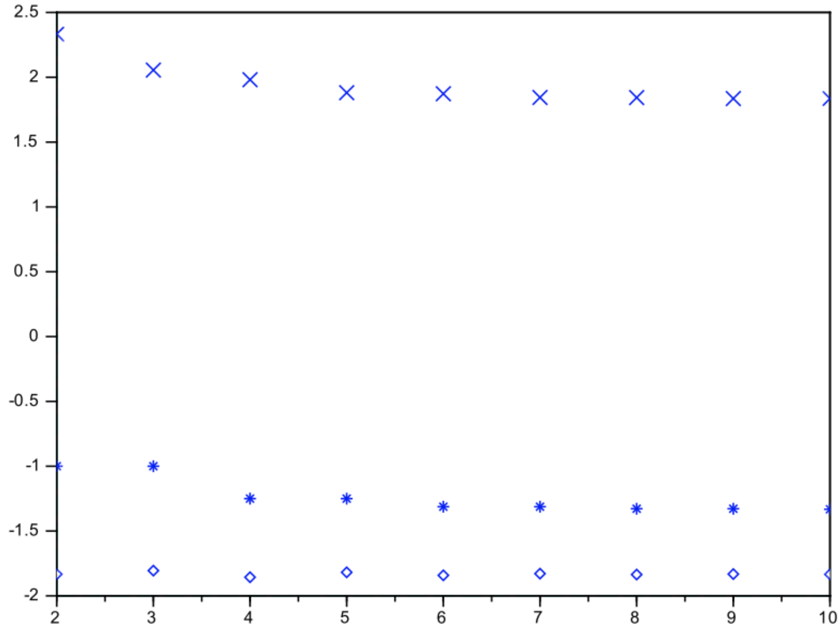
   (e) Pour tout entier naturel n, on note $X_n = \begin{pmatrix} \alpha_n \\ \beta_n \\ \gamma_n \end{pmatrix}$.

   Déduire des questions précédentes les expressions de α_n, β_n et γ_n en fonction de n.

4. (a) Compléter la fonction ci-dessous qui prend en argument un entier n supérieur ou égal à 2 et qui renvoie la matrice X_n :

```
def X(n) :
    Xold = np.array([[3], [0], [-1]])
    Xnew = np.array([[3], [0], [-2]])
    A = np.array([[2, 1, -2], [0, 3, 0], [1, -1, 5]])
    B = np.array([[1, -1, -1], [-3, 3, -3], [-1, 1, 1]])
    for i in range(2, n+1) :
        Aux = .....
        Xold = .....
        Xnew = .....
    return( ..... )
```

   (b) La fonction précédente a été utilisée dans un script permettant d'obtenir graphiquement les valeurs de α_n, β_n et γ_n en fonction de n :



Associer chacune des trois représentations graphiques à chacune des suites $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en justifiant votre réponse.

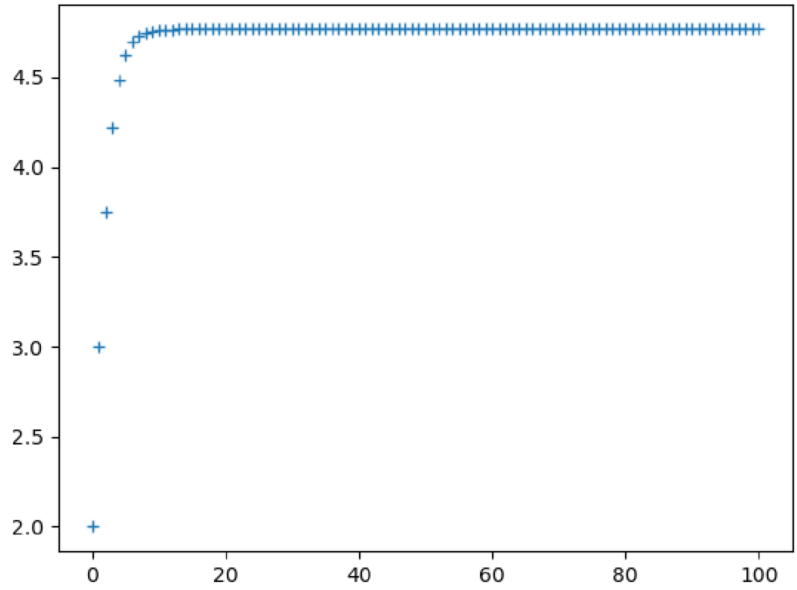
Exercice 3

Pour tout entier naturel n, on pose : $u_n = \displaystyle\prod_{k=0}^{n}\left(1+\frac{1}{2^k}\right) = (1+1)\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{2^n}\right)$.

1. Donner, sous forme d'entiers ou de fractions simplifiées, les valeurs de u_0, u_1 et u_2.
2. (a) Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n puis en déduire les variations de la suite (u_n).
   (b) Montrer que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n \geq 2$.
   (c) Établir que, pour tout réel $x > -1$, on a : $\ln(1+x) \leq x$.
   (d) En déduire, pour tout entier naturel n, un majorant de $\ln(u_n)$.
3. En utilisant les questions précédentes, montrer que la suite (u_n) converge vers un réel $\ell \in \left[2, \mathrm{e}^2\right]$.
4. (a) Compléter le programme suivant qui calcule par récurrence les termes de rangs 1 à 100 de la suite (u_n) et la représente graphiquement.
   L'instruction manquante fera obligatoirement intervenir les variables `U[k]` et `puissances`.

```
U = np.zeros(101)
U[0] = 2
puissances = 1
for k in range(100) :
    puissances = puissances*1/2
    U[k+1] = .....
plt.plot(U,'+')
plt.show()
```

   (b) Après exécution, on obtient le graphique suivant :



Expliquer en quoi la représentation graphique obtenue est cohérente avec les résultats de la question 3.

5. On se propose dans cette question de déterminer la nature de la série de terme général $(\ell - u_n)$.

   (a) Justifier que la suite $(\ln(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge et que l'on a : $\ln(\ell) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{2^k}\right)$.

   (b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $\ln\left(\dfrac{\ell}{u_n}\right) = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{2^k}\right)$.

   (c) Vérifier, en utilisant le résultat de la question 2.(c), que : $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq \ln\left(\dfrac{\ell}{u_n}\right) \leq \dfrac{1}{2^n}$.

   (d) Déduire de la question précédente que : $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq \ell - u_n \leq \ell\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{1}{2^n}}\right)$.

   (e) Justifier que, pour $x \in \mathbb{R}$, on a : $1 - \mathrm{e}^{-x} \leq x$. En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq \ell - u_n \leq \dfrac{\ell}{2^n}$.
   Conclure quant à la nature de la série de terme général $(\ell - u_n)$.