DM 5

A faire pour le Lundi 4 Novembre

Exercice 1

On pose considère la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

1. (a) Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de A.
   (b) Montrer que A est diagonalisable.
   (c) Déterminer une matrice diagonale D et une matrice inversible P telles que $A = PDP^{-1}$.
   (d) Calculer P^{-1}.

2. On se propose de résoudre l'équation $M^2 = A$, d'inconnue M une matrice carrée d'ordre trois.
   (a) On note $N = P^{-1}MP$. Montrer : $M^2 = A \Leftrightarrow N^2 = D$.
   (b) Établir que, si $N^2 = D$, alors $ND = DN$.
   (c) Résoudre l'équation $DN = ND$ d'inconnue $N \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.
   (d) Déterminer toutes les matrices diagonales $N \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $N^2 = D$.
   (e) Expliciter les matrices M solutions de l'équation $M^2 = A$.

Exercice 2

Partie I : Étude de deux suites.

Pour tout entier naturel n non nul, on pose :

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n) \quad \text{et} \quad v_n = u_n - \frac{1}{n}.$$

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $f(x) = \dfrac{1}{x+1} + \ln(x) - \ln(x+1)$.
   (a) Déterminer $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.
   (b) Étudier les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}_+^*$ et dresser son tableau de variation.
   (c) Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} - u_n = f(n)$.
   (d) En déduire la monotonie de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.
   (e) Écrire une fonction `Python` d'en-tête `def u(n)` qui prend en argument un entier naturel n non nul et qui renvoie la valeur de u_n.

2. (a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $v_{n+1} - v_n = \dfrac{1}{n} - \ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)$.
   (b) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $\ln(1+x) \leq x$. En déduire que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante.
   (c) *Question uniquement pour les 5/2 - Les 3/2 pourront admettre le résultat pour la suite.* Donner le développement limité d'ordre 2 de $\ln(1+x)$ en 0. En déduire que :
   $$v_{n+1} - v_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{1}{2n^2}.$$
   (d) Déterminer la nature de la série de terme général $v_{n+1} - v_n$. On note $\gamma = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (v_{n+1} - v_n)$.

(e) Pour $n \geq 2$, simplifier la somme partielle : $\sum_{k=1}^{n-1}(v_{k+1} - v_k)$.

En déduire que la suite $(v_n)_{n\geq 2}$ converge vers γ.

3. (a) Déterminer $\lim_{n\to+\infty} u_n$.

(b) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ v_n \leq \gamma \leq u_n$. Puis montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ |u_n - \gamma| \leq \dfrac{1}{n}$.

(c) On rappelle que l'instruction `np.floor(x)` renvoie la partie entière d'un réel x et on suppose que la fonction `u` de la question 1.(e) a été correctement programmée. Expliquer l'intérêt et le fonctionnement du script ci-dessous :

```python
eps = float(input('Entrer un réel strict. positif : '))
n = np.floor(1/eps)+1
print(u(n))
```

Partie II : Étude d'une série.

Pour tout entier naturel n non nul, on pose $a_n = \dfrac{1}{n(2n-1)}$.

4. Démontrer que la série de terme général a_n converge.

5. (a) Justifier que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k-1} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k}$.

(b) Déterminer deux réels α et β tels que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_n = \dfrac{\alpha}{n} + \dfrac{\beta}{2n-1}$.

(c) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k = 2\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$.

6. (a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} = u_{2n} - u_n + \ln(2)$

où $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est la suite définie dans la partie I.

(b) Calculer alors $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$.

Exercice 3

Un ordinateur envoie chaque jour un courrier électronique par l'intermédiaire de deux serveurs: le serveur A ou le serveur B.

On constate que le serveur A est choisi dans 70% des cas et donc que le serveur B est choisi dans 30% des cas. En d'autres termes, la probabilité pour que le serveur A (resp. B) soit choisi est de $\dfrac{7}{10}$ (resp. $\dfrac{3}{10}$). Les choix des serveurs sont supposés indépendants les uns des autres.

1. Dans cette question, on suppose que la probabilité d'une erreur de transmission avec le serveur A est de $\dfrac{1}{10}$, alors que la probabilité d'erreur de transmission avec le serveur B est de $\dfrac{1}{20}$.

(a) Calculer la probabilité pour qu'il y ait une erreur de transmission lors de l'envoi d'un courrier.

(b) Si le courrier a subi une erreur de transmission, quelle est la probabilité pour que le serveur utilisé soit le serveur A?

2. Un jour donné, appelé le jour 1, on note les différents serveurs utilisé par l'ordinateur par une suite de lettres. Par exemple, la suite $AABBBA\dots$ signifie que les deux premiers jours l'ordinateur a choisi le serveur A, les jours 3. 4 et 5 il a choisi le serveur B, et le jour 6 le serveur A. Dans cet exemple, on dit que l'on a une première série de longueur 2 et une deuxième série de longueur 3 (Ce qui est également le cas de la série $BBAAAB\dots$)

   On note L_1 la variable aléatoire représentant la longueur de la première série et L_2 la variable aléatoire représentant la longueur de la deuxième série.

   Ainsi, pour $k \geq 1$, dire que $L_1 = k$ signifie que pendant les k premiers jours, c'est le même serveur qui a été choisi et le jours suivant l'autre serveur.

   (a) Démontrer que, pour tout entier $k \geq 1$, $P\left(L_1 = k\right) = \frac{7}{10}\left(\frac{3}{10}\right)^k + \frac{3}{10}\left(\frac{7}{10}\right)^k$.

   (b) Vérifier par le calcul que $\sum_{k=1}^{+\infty} P\left(L_1 = k\right) = 1$.

   (c) Déterminer l'espérance mathématique de L_1.

   (d) Calculer la probabilité $P(L_1 = i \cap L_2 = j)$ pour $i, j \geq 1$.

   (e) En déduire la loi de L_2.

3. A partir d'un jour donné, que l'on appellera le jour 1, on note: T_1 le numéro du jour où pour la première fois le serveur A est choisi par l'ordinateur et T_2 le numéro du jour où pour la deuxième fois le serveur A est choisi.

   (a) Déterminer la loi de T_1.

   (b) Calculer l'espérance et la variance de T_1.

   (c) Déterminer $T_2(\Omega)$.

   (d) Montrer que, pour tout $k \geq 2$

$$P\left(T_2 = k\right) = (k-1)\left(\frac{7}{10}\right)^2\left(\frac{3}{10}\right)^{k-2}$$

Exercice 4

On admet que, si une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers le réel ℓ, alors on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} a_j = \ell$.

On se propose d'étudier la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la donnée de $u_0 = 0$ et par la relation, valable pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = \frac{u_n^2 + 1}{2}$.

1. (a) Montrer que, pour tout entier naturel n, on a : $0 \leq u_n < 1$.

   (b) Étudier les variations de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

   (c) Déduire des questions précédentes que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et donner sa limite.

2. Pour tout entier naturel n, on pose : $v_n = 1 - u_n$.

   (a) Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{v_{n+1}} - \frac{1}{v_n}\right) = \frac{1}{2}$.

   (b) Utiliser le résultat admis en début d'exercice pour trouver un équivalent de v_n lorsque n tend vers $+\infty$.

   (c) En déduire que $u_n = 1 - \frac{2}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$.

3. (a) Écrire une fonction `Python` d'en-tête `def u(n)` qui renvoie la valeur de u_n.

   (b) En déduire un programme, rédigé en `Python`, qui permet de déterminer et d'afficher la plus petite valeur de n pour laquelle on a : $1 - u_n < 10^{-3}$.
