DM 6

A rendre le Vendredi 15 Novembre

Exercice 1

On considère la fonction f définie pour tout réel x positif ou nul par $f(x) = 1 - e^{-x}$.

1. (a) Dresser le tableau de variation de f.

   (b) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}^+,\ f(x) \leq x$. Justifier qu'il y a égalité seulement pour $x = 0$.

2. On considère la suite (u_n) définie par son premier terme $u_0 = 1$ et par la relation :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n).$$

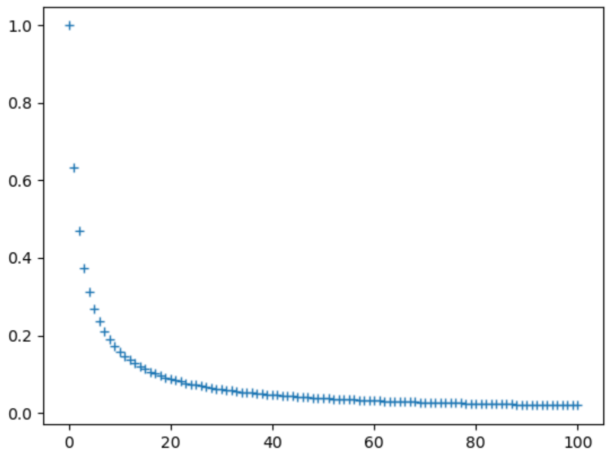
   (a) Compléter les instructions suivantes qui permettent de représenter les termes de rangs 0 à 100 de la suite (u_n) :

```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

U = np.zeros(101)
U[0] = .....
for k in range(1,101):
    U[k] = .....

N = np.arange(101)
plt.plot(N, U, '+')
plt.show()
```

   On obtient le graphique suivant :



   Émettre une conjecture sur la monotonie et la limite de la suite (u_n).

   (b) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in]0, 1]$.

   (c) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n - u_{n+1} \geq 0$.

   (d) Conclure quant à la convergence de la suite (u_n) et donner sa limite.

3. (a) Montrer que la série de terme général $(u_n - u_{n+1})$ est convergente.

   (b) Montrer que $u_n - u_{n+1} \sim \dfrac{u_n^2}{2}$ en $+\infty$.

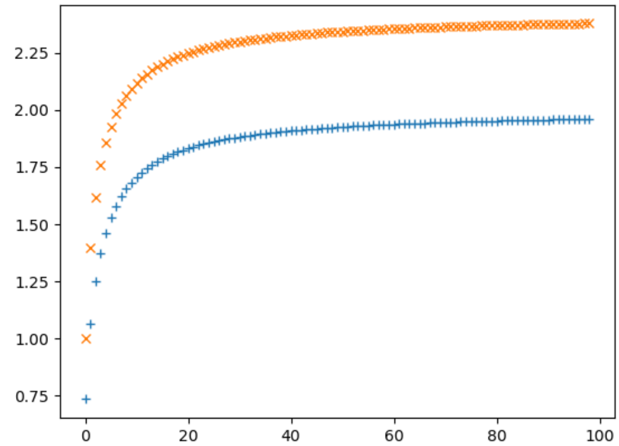
   (c) Donner enfin la nature de la série de terme général u_n^2.

(d) A la suite des programmes précédents, on ajoute les instructions suivantes :

```
V = 2*(U[0:99]-U[1:100])
S1 = np.cumsum(V)
S2 = np.cumsum(U[0:99]**2)

M = np.arange(99)
plt.figure(2)
plt.plot(M, S1, '+')
plt.plot(M, S2, 'x')
plt.show()
```

On obtient sur une deuxième fenêtre le graphique :



Expliquer à quelles séries correspondent les deux courbes tracées ?
En quoi le graphique est-il cohérent avec les résultats de l'exercice ?
Ces deux séries sont-elles équivalentes ?

Exercice 2

On considère la fonction f définie par $f(0) = 1$, et pour tout x non nul de $]-\infty; 1[$,

$$f(x) = \frac{-x}{(1-x)\ln(1-x)}.$$

1. Montrer que f est continue sur $]-\infty; 1[$.
2. (a) Déterminer le développement limité de $\ln(1-x)$ à l'ordre 2 lorsque x est au voisinage de 0.
   (b) En déduire que f est dérivable en 0, puis vérifier que $f'(0) = \dfrac{1}{2}$.
3. (a) Montrer que f est dérivable sur $]-\infty; 0[$ et sur $]0; 1[$, puis calculer $f'(x)$ pour tout réel x élément de $]-\infty; 0[\cup]0; 1[$.
   (b) Déterminer le signe de la quantité $\ln(1-x) + x$ lorsque x appartient à $]-\infty; 1[$, puis en déduire les variations de f.
   (c) Déterminer les limites de f aux bornes de son domaine de définition, puis dresser son tableau de variation.
4. (a) Établir que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un seul réel de $[0; 1[$, noté u_n, tel que $f(u_n) = n$ et donner la valeur de u_1.
   (b) Montrer que la suite (u_n) est croissante et converge, puis que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$.

Exercice 3

On réalise une suite de lancers d'une pièce équilibrée, chaque lancer amenant donc pile ou face avec une probabilité $1/2$.
On note P_k (resp. F_k) l'évènement : "on obtient pile (resp. face) au k-ième lancer".
Pour ne pas surcharger l'écriture, on écrira, par exemple, P_1F_2 à la place de $P_1 \cap F_2$.
On note X la variable aléatoire qui prend la valeur k si l'on obtient pour la première fois pile puis face dans cet ordre aux lancers $k-1$ et k (k désignant un entier supérieur ou égal à 2), X prenant la valeur 0 si l'on obtient jamais une telle succession.

1. Calculer $P(X = 2)$.

2. (a) En remarquant que $(X = 3) = P_1P_2F_3 \cup F_1P_2F_3$, calculer $P(X = 3)$.
   (b) Sur le modèle de la question précédente, écrire, pour tout entier k supérieur ou égal à 3, l'évènement $(X = k)$ comme réunion de $(k-1)$ évènements incompatibles.
   (c) Déterminer $\mathrm{P}(X = k)$ pour tout entier k supérieur ou égal à 2.
   (d) Calculer $\mathrm{P}(X = 0)$.

3. On se propose, dans cette question, de retrouver le résultat de la question 2.(c) par une autre méthode.
   (a) Montrer que, k désignant un entier supérieur ou égal à 3, si le premier lancer est un pile, alors il faut et il suffit que $P_2P_3 \ldots P_{k-1}F_k$ se réalise pour que $(X = k)$ se réalise.
   (b) En déduire, en utilisant la formule des probabilités totales que :
$$\forall k \geq 3, \qquad P(X = k) = \frac{1}{2}P(X = k-1) + \frac{1}{2^k}.$$
   (c) On pose, pour tout entier k supérieur ou égal à 2, $u_k = 2^k P(X = k)$.
   Montrer que la suite $(u_k)_{k\geq 2}$ est arithmétique. Retrouver le résultat annoncé.

4. Montrer que X a une espérance $E(X)$, puis la calculer.

5. (a) Compléter la fonction suivante qui effectue une simulation de la variable aléatoire X :

```
def simulX():
    p1 = np.floor(rd.random()*2)
    p2 = np.floor(rd.random()*2)
    x = 2
    while ..... :
        p1 = p2
        p2 = np.floor(rd.random()*2)
        x = .....
    return(x)
```

   (b) A la suite de la définition précédente, on ajoute les instructions suivantes :

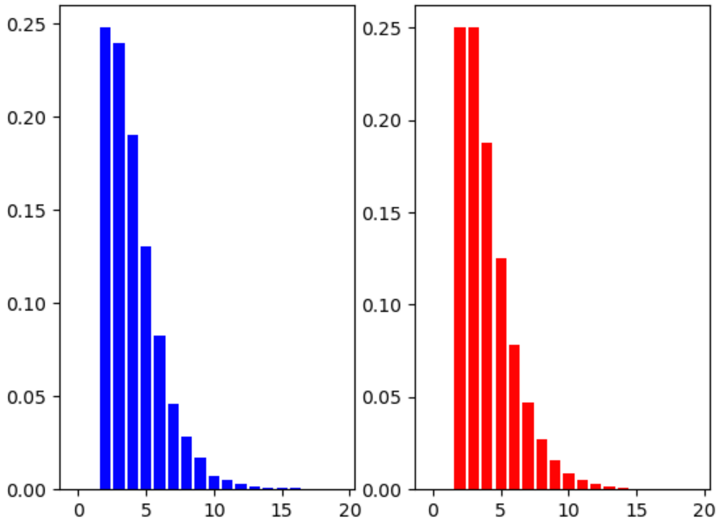
```
C = np.zeros(20)
for k in range(1000):
    n = simulX()
    C[n] = C[n]+1
```

   Expliquer ce que font ces instructions et indiquez ce que contiennent les cases du vecteur ligne `C`, une fois le programme exécuté.
   (c) On complète enfin le programme avec les instructions suivantes :

```
N = np.arange(20)
plt.subpot(1,2,1)
plt.bar(N,C/1000)

L=np.zeros(20)
p = 1/2
for k in range(2,20):
    p = p*1/2
    L[k] = (k-1)*p
plt.subplot(1,2,2)
plt.bar(N,L)
plt.show()
```

Après exécution, on obtient le résultat graphique suivant :



Préciser ce qui est calculé dans le vecteur ligne L.

Comparer et commenter les deux diagrammes obtenus.

(d) Écrire un programme qui, étant donné un entier naturel n, effectue n simulations indépendantes de la variable X et calcule la moyenne m de ces simulations.
Lorsque n est proche de l'infini, vers quelle valeur convergera la valeur m ?

Exercice 4

Partie I : Étude d'une variable discrète sans mémoire.

Soit X une variable aléatoire discrète, à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que : $\forall m \in \mathbb{N},\ P(X \geq m) > 0$.
On suppose également que X vérifie : $\forall (m;n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N},\ P_{(X \geq m)}(X \geq n+m) = P(X \geq n)$.
On pose $P(X = 0) = p$ et on suppose que $p > 0$.

1. On pose $q = 1 - p$. Montrer que $P(X \geq 1) = q$. En déduire que $0 < q < 1$.

2. Montrer que : $\forall (m;n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N},\ P(X \geq n+m) = P(X \geq m)P(X \geq n)$.

3. Pour tout n de $\mathbb{N}$, on pose $u_n = P(X \geq n)$.

   (a) Utiliser la relation obtenue à la deuxième question pour montrer que la suite (u_n) est géométrique.

   (b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, exprimer $P(X \geq n)$ en fonction de n et de q.

   (c) Établir que : $\forall n \in \mathbb{N},\ P(X = n) = P(X \geq n) - P(X \geq n+1)$.

   (d) En déduire que, pour tout n de $\mathbb{N}$, on a $P(X = n) = q^n p$.

4. (a) Reconnaître la loi suivie par la variable $X + 1$.
   (b) En déduire $E(X)$ et $V(X)$.

Partie II : Taux de panne d'une variable discrète.
Pour toute variable aléatoire Y à valeurs dans $\mathbb{N}$ et telle que, pour tout n de $\mathbb{N}$, $P(Y \geq n) > 0$, on définit le taux de panne de Y à l'instant n, noté λ_n par : $\forall n \in \mathbb{N},\ \lambda_n = P_{(Y \geq n)}(Y = n)$.

5. (a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ \lambda_n = \dfrac{P(Y = n)}{P(Y \geq n)}$.
   (b) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N},\ 1 - \lambda_n = \dfrac{P(Y \geq n + 1)}{P(Y \geq n)}$.
   (c) Établir alors que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leq \lambda_n < 1$.
   (d) Montrer par récurrence, que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ P(Y \geq n) = \displaystyle\prod_{k=0}^{n-1}(1 - \lambda_k)$.

6. (a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^{\times},\ \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} P(Y = k) = 1 - P(Y \geq n)$.
   (b) En déduire que $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} P(Y \geq n) = 0$.
   (c) Montrer que : $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n-1} - \ln(1 - \lambda_k) = +\infty$.

Partie III : Caractérisation des variables dont la loi est du type de celle de X.

7. Déterminer le taux de panne de la variable X dont la loi a été trouvée à la question 3.(d).
8. On considère une variable aléatoire Z, à valeurs dans $\mathbb{N}$, et vérifiant : $\forall n \in \mathbb{N},\ P(Z \geq n) > 0$.
   On suppose que le taux de panne de Z est constant, c'est-à-dire que l'on a : $\forall n \in \mathbb{N},\ \lambda_n = \lambda$.
   (a) Montrer que $0 < \lambda < 1$.
   (b) Pour tout n de $\mathbb{N}$, déterminer $P(Z \geq n)$ en fonction de λ et n.
   (c) Conclure que les seules variables aléatoires Z à valeurs dans $\mathbb{N}$ dont le taux de panne est constant et telles que pour tout n de $\mathbb{N}$, $P(Z \geq n) > 0$, sont les variables dont la loi est du type de celle de X.