

Correction - DM 7

**A rendre le Mercredi 27 Novembre****Exercice 1 (EDHEC 2004)**

1. (a) On étudie la limite par opérations élémentaires :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty \quad \text{donc} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-n}{x} = -\infty$$

puis en composant par l'exponentielle,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{-\frac{n}{x}} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0$$

donc par produit,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f_n(x) = 0 = f_n(0)$$

donc  $f_n$  est continue à droite en 0.

- (b) On étudie le taux d'accroissement pour
- $x > 0$
- :

$$\frac{f_n(x) - f_n(0)}{x - 0} = \frac{x e^{-\frac{n}{x}}}{x} = e^{-\frac{n}{x}} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 0$$

(vu à la question précédente) donc  $f_n$  est dérivable à droite en 0, et  $(f_n)'_d(0) = 0$ .

2. (a) La fonction
- $x \rightarrow -\frac{n}{x}$
- est dérivable sur
- $] -\infty; 0[$
- et
- $]0; +\infty[$
- et exp est dérivable sur
- $\mathbb{R}$
- donc par composition,
- $x \rightarrow e^{-\frac{n}{x}}$
- est dérivable sur
- $] -\infty; 0[$
- et
- $]0; +\infty[$
- .

De plus, la fonction  $x \rightarrow x$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$ , donc par produit  $f_n$  est dérivable sur  $] -\infty; 0[$  et  $]0; +\infty[$ .On obtient pour tout  $x \neq 0$ ,

$$f'_n(x) = e^{-\frac{n}{x}} + x \times \frac{n}{x^2} e^{-\frac{n}{x}} = \left(1 + \frac{n}{x}\right) e^{-\frac{n}{x}} = \frac{x+n}{x} e^{-\frac{n}{x}}.$$

On obtient alors le tableau de variation suivant :

$x$	$-\infty$	$-n$	$0$	$+\infty$
$e^{-\frac{n}{x}}$	+	+	+	
$x+n$	-	0	+	+
$x$	-	-	0	+
$f'_n(x)$	+	0	-	+

- (b) En
- $+\infty$
- , on a

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{n}{x} = 0$$

donc par composition par l'exponentielle continue,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-\frac{n}{x}} = e^0 = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$$

donc par produit

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = +\infty.$$

En  $-\infty$ , on a

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} -\frac{n}{x} = 0$$

donc par composition par l'exponentielle continue,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-\frac{n}{x}} = e^0 = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$$

donc par produit

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f_n(x) = -\infty.$$

En  $0^-$ , on pose  $X = -\frac{1}{x} \rightarrow +\infty$ , et on obtient par croissances comparées que

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f_n(x) = \lim_{X \rightarrow +\infty} -\frac{e^{nX}}{X} = -\infty$$

enfin en  $0^+$  on a vu que  $f_n$  continue à droite en 0 donc

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f_n(x) = f_n(0) = 0.$$

On obtient alors :

$x$	$-\infty$	$-n$	$0$	$+\infty$
$f'_n(x)$		$+$	$0$	$-$
$f_n(x)$	$-\infty$	$-ne$	$-\infty$	$+\infty$

3. (a) Le cours donne immédiatement :  $e^u = 1 + u + \frac{u^2}{2} + o(u^2)$ .

(b) On pose alors  $u = -\frac{n}{x} \xrightarrow{x \rightarrow \pm\infty} 0$  donc on peut appliquer le DL précédent :

$$e^{-\frac{n}{x}} = 1 + \left(-\frac{n}{x}\right) + \frac{\left(-\frac{n}{x}\right)^2}{2} + o\left[\left(-\frac{n}{x}\right)^2\right] = 1 - \frac{n}{x} + \frac{n^2}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

puis on multiplie par  $x$  :

$$f_n(x) = x - n + \frac{n^2}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right).$$

(c) On en déduit que :

$$f_n(x) - (x - n) = \frac{n^2}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right) \xrightarrow{x \rightarrow \pm\infty} 0$$

donc la droite d'équation  $y = x - n$  est asymptote à  $\mathcal{C}_n$  en  $-\infty$  et  $+\infty$ .

Au voisinage de  $-\infty$  on a

$$f_n(x) - (x - n) \sim \frac{n^2}{2x} < 0$$

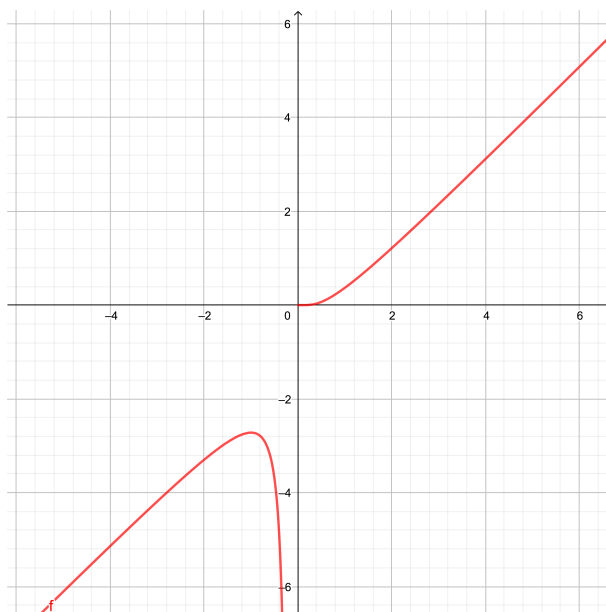
donc  $\mathcal{C}_n$  se trouve en dessous de son asymptote.

Au voisinage de  $+\infty$  on a

$$f_n(x) - (x - n) \sim \frac{n^2}{2x} > 0$$

donc  $\mathcal{C}_n$  se trouve au-dessus de son asymptote.

(d) On rassemble toutes les informations précédentes : asymptote en  $\pm\infty$ , variations correctes, limites en  $0^-$  et  $0^+$ , maximum local atteint en  $-1$  et de valeur  $-e \simeq -2,7$ .



4. (a) D'après ses variations,  $f_n$  admet un maximum sur  $] -\infty; 0[$  qui est strictement négatif donc  $f_n$  est strictement négative sur  $] -\infty; 0[$  et il n'y a pas de solution sur  $] -\infty; 0[$ .

De plus  $f_n$  est continue et strictement croissante sur  $\mathbb{R}^+$  donc réalise une bijection de  $\mathbb{R}^+$  dans  $[f(0); \lim_{+\infty} f[ = [0; +\infty[ = \mathbb{R}^+$ .

Or  $1 \in \mathbb{R}^+$  donc il existe un unique  $u_n \in \mathbb{R}^+$  tel que  $f_n(u_n) = 1$ .

Il y a donc une unique solution sur  $\mathbb{R}$ , et elle est positive (strictement car  $f_n(0) = 0 \neq 1$ ).

- (b) Comme  $u_n$  est implicite, on compare  $f_n(u_n)$  et  $f_n(1)$  : on calcule

$$f_n(1) = 1 \times e^{-n} = e^{-n} < e^0 = 1$$

car  $-n < 0$  et exp est strictement croissante.

On en déduit que  $f_n(1) < f_n(u_n)$  et par stricte croissance de  $f_n$  sur  $\mathbb{R}^+$ ,

$$1 < u_n.$$

On veut ensuite prouver que  $u_n \ln(u_n) = n$ , et pour prouver une égalité sur une quantité implicite, on revient à sa définition en explicitant la fonction :

$$f_n(u_n) = 1 \quad \text{donc} \quad u_n \times e^{-\frac{n}{u_n}} = 1.$$

On transforme alors : on compose par  $\ln$  (les deux quantités valent 1 donc sont bien strictement positives) et on obtient :

$$\ln(u_n) - \frac{n}{u_n} = 0 \quad \text{donc} \quad u_n \ln(u_n) - n = 0 \quad \text{et enfin} \quad u_n \ln(u_n) = n.$$

donc  $u_n$  est bien solution de l'équation  $x \ln(x) = n$ .

- (c)  $g$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $[1; +\infty[$  comme produit de fonctions de classe  $\mathcal{C}^\infty$  et

$$g'(x) = \ln(x) + x \times \frac{1}{x} = \ln(x) + 1 > 0 \quad \text{sur} \quad [1; +\infty[.$$

On en déduit que  $g$  est continue et strictement croissante sur cet intervalle donc réalise une bijection de  $[1; +\infty[$  vers son image  $[g(1); \lim_{+\infty} g[$ .

Avec

$$g(1) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$$

comme produit de limites valant  $+\infty$ , on obtient que  $g$  est une bijection de  $[1; +\infty[$  dans  $\mathbb{R}^+$ .

Comme  $1 \in \mathbb{R}^+$ , l'équation  $g(x) = n$  admet bien une solution, et celle-ci est unique donc c'est forcément  $u_n$ .

De plus on a

$$g(u_n) = n \Leftrightarrow u_n = g^{-1}(n)$$

Comme  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$  on obtient  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g^{-1}(x) = +\infty$ , et on en déduit que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} g^{-1}(n) = +\infty.$$

(d) On a obtenu précédemment que

$$u_n \ln(u_n) = n.$$

On compose par  $\ln$  (les deux termes valent  $n$  donc sont strictement positifs) et comme  $u_n > 1$ ,  $\ln(u_n) > 0$  et  $\ln(\ln(u_n))$  existe bien donc :

$$\ln(u_n \ln(u_n)) = \ln n \quad \text{puis} \quad \ln(u_n) + \ln(\ln(u_n)) = \ln n.$$

On factorise la somme par son terme prépondérant  $\ln(u_n)$  :

$$\ln(u_n) \left( 1 + \frac{\ln(\ln(u_n))}{\ln(u_n)} \right) = \ln(n)$$

Enfin en posant  $X = \ln(u_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$  on obtient par croissances comparées que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 + \frac{\ln(\ln(u_n))}{\ln(u_n)} = 1 + \lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{\ln(X)}{X} = 1 + 0 = 1$$

ce qui donne bien :

$$\ln u_n \sim \ln n$$

Attention, on ne peut pas composer l'équivalent par  $\exp$  !

On utilise à nouveau  $u_n \ln(u_n) = n$ , qui donne

$$u_n = \frac{n}{\ln(u_n)} \sim \frac{n}{\ln(n)}.$$

5. (a) On a  $u_n = g^{-1}(n)$ ; or la fonction  $g$  est strictement croissante donc  $g^{-1}$  aussi, ce qui donne

$$u_{n+1} = g^{-1}(n+1) > g^{-1}(n) = u_n$$

pour tout  $n$ , donc  $(u_n)$  est strictement croissante.

(b) On calcule cette quantité et on fait apparaître  $f_{n+1}(u_{n+1}) = 1$  pour simplifier :

$$f_n(u_{n+1}) = u_{n+1} e^{-\frac{n}{u_{n+1}}} = u_{n+1} e^{-\frac{(n+1)-1}{u_{n+1}}} = u_{n+1} e^{-\frac{n+1}{u_{n+1}}} e^{\frac{1}{u_{n+1}}} = 1 \times e^{\frac{1}{u_{n+1}}} = e^{\frac{1}{u_{n+1}}}.$$

6. (a) Pour encadrer une intégrale on regarde l'ordre des bornes puis on travaille sur l'intérieur : Par croissance stricte de la suite  $u_n$ , on sait que  $u_n < u_{n+1}$  donc les bornes de  $I_n$  sont rangées dans l'ordre croissant.

Pour tout  $t \in [u_n; u_{n+1}]$  par croissance de  $f_n$  sur  $\mathbb{R}^+$  on obtient :

$$f_n(u_n) \leq f_n(t) \leq f_n(u_{n+1}) \quad \text{donc} \quad 1 \leq f_n(t) \leq e^{\frac{1}{u_{n+1}}}$$

En intégrant l'encadrement avec les bornes dans l'ordre croissant on obtient

$$\int_{u_n}^{u_{n+1}} dt \leq I_n \leq e^{\frac{1}{u_{n+1}}} \int_{u_n}^{u_{n+1}} dt$$

puis en calculant les intégrales de gauche et de droite :

$$u_{n+1} - u_n \leq I_n \leq (u_{n+1} - u_n) e^{\frac{1}{u_{n+1}}}.$$

On divise enfin l'encadrement par  $u_{n+1} - u_n > 0$  :

$$1 \leq \frac{I_n}{u_{n+1} - u_n} \leq e^{\frac{1}{u_{n+1}}}.$$

- (b) On sait que  $\lim u_{n+1} = +\infty$  donc par quotient puis en composant par l'exponentielle continue on obtient :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{u_{n+1}} = 0 \quad \text{puis} \quad \lim e^{\frac{1}{u_{n+1}}} = e^0 = 1.$$

Le théorème d'encadrement donne alors

$$\lim \frac{I_n}{u_{n+1} - u_n} = 1 \quad \text{donc} \quad I_n \sim (u_{n+1} - u_n).$$

- (c)  $I_n$  et  $(u_{n+1} - u_n)$  sont positives et équivalentes en  $+\infty$ , donc le théorème de comparaison permet de dire que les séries  $\sum_{n \geq 1} I_n$  et  $\sum_{n \geq 1} (u_{n+1} - u_n)$  sont de même nature.

Étudions cette dernière à l'aide de sa somme partielle : par télescopage,

$$\sum_{n=1}^p (u_{n+1} - u_n) = u_{p+1} - u_1 \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} +\infty$$

donc les deux séries divergent.

En particulier on obtient bien que la série de terme général  $I_n$  est divergente.

### Exercice 2 (ECRICOME 2021)

1. Avec les notations du texte, il est clair que les deux derniers lancers doivent être des *Pile* et qu'il ne peut pas y avoir de succession de deux *Pile* consécutifs avant. Par conséquent,

$$\begin{aligned} (X = 2) &= P_1 \cap P_2 \\ (X = 3) &= F_1 \cap P_2 \cap P_3 \\ (X = 4) &= (F_1 \cap F_2 \cap P_3 \cap P_4) \cup (P_1 \cap F_2 \cap P_3 \cap P_4) \end{aligned}$$

Par indépendance des événements  $(P_k)$  et  $(F_k)$  et incompatibilité des deux alternatives dans  $(X = 4)$ , on a

$$\begin{aligned} a_2 &= P(P_1)P(P_2) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \\ a_3 &= P(F_1)P(P_2)P(P_3) = \frac{1}{8} \\ a_4 &= \left(\frac{1}{2}\right)^4 + \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{8}. \end{aligned}$$

2. On peut réécrire l'évènement  $U_n$  à l'aide de la variable  $X$ . Si, au cours des  $n$  premiers lancers, on a au moins une fois deux *Pile* consécutifs, alors ces deux *Pile* consécutifs arrivent pour la première fois au deuxième lancer, ou bien au troisième, ou bien à n'importe quel moment avant le  $n$ -ième de sorte qu'on peut écrire

$$U_n = \bigcup_{k=2}^n [X = k].$$

Comme  $X$  est une variable aléatoire, les événements  $(X = 2), \dots, (X = n)$  sont incompatibles et par conséquent

$$u_n = P(U_n) = P\left(\bigcup_{k=2}^n (X = k)\right) = \sum_{k=2}^n P(X = k) = \sum_{k=2}^n a_k.$$

3. (a) En étudiant le programme à trous, on constate que la variable `tirs` compte le nombre de lancers, c'est donc la valeur que renvoie notre fonction. La variable `pile` est le nombre de *Pile* consécutifs, on veut atteindre 2. Si on a un *Face*, cette variable est remise à zéro.

```

1 def simulX():
2     tirs = 0 #nombre de tirages
3     pile = 0 #nombre de pile "consécutifs"
4     while pile < 2 : #tant qu'on a pas 2 pile consécutifs
5         if rd.random() < 1/2 :
6             pile = pile+1 #un pile de plus si pile
7         else:
8             pile = 0 #sinon, face et on retombe à 0
9             tirs = tirs+1 #un tirage de plus
10    return(tirs)

```

- (b) Pour ce type de programme classique, on utilise une boucle `for`.

```

1 def moyenne(n):
2     X = np.zeros(n)
3     for i in range(n):
4         X[i] = simulX()
5     return(np.mean(X))

```

- (c) On peut conjecturer que plus  $n$  est grand, plus la valeur renvoyée par `moyenne(n)` sera proche de  $E(X)$  (car la moyenne empirique tend vers l'espérance). On lit une oscillation de plus en plus proche de 6. On conjecture donc que  $X$  admet une espérance et que  $E(X) = 6$ .
4. (a) L'évènement  $U_{n+1}$  signifie qu'on a obtenu 2 *Pile* consécutifs à un moment au cours des  $n+1$  premiers lancers. On a pu l'obtenir au cours des  $n$  premiers lancers (ce qui correspond à  $U_n$ ) ou grâce à l'ajout du  $(n+1)$ -ième lancer, c'est-à-dire avec les deux derniers lancers  $P_n \cap P_{n+1} = B_{n+1}$ . En d'autres termes,

$$U_{n+1} = U_n \cup B_{n+1}.$$

Par la formule du crible,

$$P(U_{n+1}) = P(U_n) + P(B_{n+1}) - P(U_n \cap B_{n+1}).$$

- (b) L'évènement  $B_{n+1}$  nous donne une information très précise (*Pile* et *Pile*) sur ce qui s'est passé lors des lancers numérotés  $n$  et  $n+1$ . Comme  $U_n$  concerne ce qui a pu se passer lors des  $n$  premiers lancers, on a naturellement l'idée de différencier selon ce qu'on a obtenu au lancer  $n-1$  : *Pile* ou *Face*. En observant que  $\{P_{n-1}, F_{n-1}\}$  est un SCE, on a

$$U_n \cap B_{n+1} = (U_n \cap B_{n+1} \cap F_{n-1}) \cup (U_n \cap B_{n+1} \cap P_{n-1}).$$

On voit alors

- D'une part,  $B_{n+1} \cap P_{n-1} = P_{n+1} \cap P_n \cap P_{n-1}$  et comme  $P_n \cap P_{n-1} \subset U_n$  (si on a *Pile* aux lancers  $n-1$  et  $n$ , on a bien eu deux *Pile* consécutifs au cours des  $n$  premiers lancers), on a

$$U_n \cap B_{n+1} \cap P_{n-1} = P_{n+1} \cap P_n \cap P_{n-1}.$$

- D'autre part, ayant obtenu *Face* au lancer  $n-1$ , on ne peut avoir eu deux *Pile* consécutifs qu'au cours des  $n-2$  premiers lancers, et donc

$$U_n \cap B_{n+1} \cap F_{n-1} = U_{n-2} \cap F_{n-1} \cap P_n \cap P_{n+1}.$$

Au final, on a bien,

$$U_n \cap B_{n+1} = (U_{n-2} \cap F_{n-1} \cap P_n \cap P_{n+1}) \cup (P_{n+1} \cap P_n \cap P_{n-1}).$$

(c) Les lancers étant indépendants,  $U_{n-2}$  est indépendant de  $F_{n-1}$ ,  $P_n$  et  $P_{n+1}$ . Il suit que

$$\begin{aligned} P(U_n \cap B_{n+1}) &= P(U_{n-2})P(F_{n-1})P(P_n)P(P_{n+1}) + P(P_{n-1})P(P_n)P(P_{n+1}) \\ &= \frac{1}{8}u_{n-2} + \frac{1}{8}. \end{aligned}$$

Par la question 4.(a), on a

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= P(U_{n+1}) = P(U_n) + P(P_n \cap P_{n+1}) - P(U_n \cap B_{n+1}) \\ &= u_n + \frac{1}{4} - \frac{1}{8}u_{n-2} - \frac{1}{8} \\ &= u_n + \frac{1}{8}(1 - u_{n-2}). \end{aligned}$$

5. Par la question précédente,

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{8}(1 - u_{n-2}) \geq 0$$

car  $u_n$  est une probabilité et donc comprise entre 0 et 1 (et donc  $1 - u_{n-2} \geq 0$ ). Ainsi, la suite  $(u_n)$  est croissante. Étant donc majorée par 1, le théorème de convergence monotone affirme qu'elle converge vers une limite  $\ell$ , également comprise entre 0 et 1. Le passage à la limite dans la relation

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{8}(1 - u_{n-2})$$

donne

$$0 = \ell - \ell = \frac{1}{8}(1 - \ell) \iff \ell = 1.$$

6. La variable  $X$  prend la valeur  $-1$  si on obtient jamais deux *Pile* consécutifs. On peut alors écrire

$$P(X = -1) = P\left(\bigcup_{k=1}^{+\infty} U_k\right) = 1 - P\left(\bigcap_{k=1}^{+\infty} U_k^c\right).$$

La suite  $(U_n)$  étant croissante au sens de l'inclusion (si on a deux *Pile* consécutifs au cours des  $n$  premiers lancers, on les a *a fortiori* au cours des  $(n+1)$  premiers lancers), le théorème de la limite monotone nous donne

$$P\left(\bigcup_{k=1}^{+\infty} U_k\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P(U_n) = 1$$

et donc

$$P(X = -1) = 1 - 1 = 0.$$

7. Soit  $n \geq 4$ . Par définition,

$$\begin{aligned} v_n - v_{n+1} &= 1 - u_n - 1 + u_{n+1} = u_{n+1} - u_n \\ &= \frac{1}{8}(1 - u_{n-2}) = \frac{1}{8}v_{n-2}. \end{aligned}$$

8. Il est clair que, si on a deux *Pile* consécutifs au cours des  $n+1$  premiers lancers, on a pu les avoir au cours des  $n$  premiers lancers ou bien (et c'est incompatible) exactement pour la première fois avec le  $(n+1)$ -ième lancer. C'est-à-dire  $(X = n+1) \cup U_n = U_{n+1}$  et que cette réunion est disjointe. Ainsi,

$$P(X = n+1) + P(U_n) = P(U_{n+1}).$$

D'après la question 4.(c) et ce qui précède, on a donc

$$P(X = n+1) = u_{n+1} - u_n = \frac{1}{8}(1 - u_{n-2}) = \frac{1}{8}v_{n-2} = v_n - v_{n+1}.$$

9. On procède, comme demandé, par récurrence. Il faut au préalable calculer  $v_2, v_3$  et  $v_4$  à partir de  $u_2, u_3$  et  $u_4$ . D'après ce qui précède,

$$u_2 = P(U_2) = P(X = 2) = \frac{1}{4}, \quad u_3 = P(X = 2) + P(X = 3) = \frac{3}{8},$$

$$u_4 = P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4) = \frac{1}{2}$$

et donc

$$v_2 = 1 - u_2 = \frac{3}{4}, \quad v_3 = 1 - u_3 = \frac{5}{8}, \quad v_4 = \frac{1}{2}.$$

**Init.** Pour  $n = 2$ , on a d'une part

$$S_2 = 2P(X = 2) = 2 \times \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

et d'autre part

$$6 - 8v_4 - 2v_2 = 6 - 4 - \frac{3}{2} = \frac{1}{2},$$

et l'initialisation est vérifiée.

**Héré.** Soit  $n \geq 2$ . Supposons que  $S_n = 6 - 8v_{n+2} - nv_n$ .

Remarquons que, d'après la question 7,

$$v_n - v_{n+1} = \frac{1}{8}v_{n-2} \iff 8v_n = v_{n-2} + 8v_{n+1}$$

ou encore

$$8v_{n+2} = v_n + 8v_{n+3}.$$

Il suit que

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= S_n + (n+1)P(X = n+1) \\ &= 6 - 8v_{n+2} - nv_n + (n+1)P(X = n+1) && \text{(par HR)} \\ &= 6 - 8v_{n+2} - nv_n + (n+1)(v_n - v_{n+1}) && \text{(par la question 8)} \\ &= 6 - 8v_{n+2} + v_n - (n+1)v_{n+1} \\ &= 6 - v_{n+1} - 8v_{n+3} - v_n + v_n - (n+1)v_{n+1} \\ &= -v_{n+1} - 8v_{n+3} - (n+1)v_{n+1}, \end{aligned}$$

ce qui est bien la relation au rang  $(n+1)$ .

**Ccl.** Par le principe de récurrence, le résultat est donc démontré pour tout  $n \geq 2$ .

10. Comme déjà mentionné, la suite  $(v_n)$  est à termes positifs (car  $1 - u_n \geq 0$ ) donc la relation précédente donne  $S_n \leq 6$  et la suite  $(S_n)$  est bien majorée. Il est également clair que  $(S_n)$  est croissante : c'est une suite de sommes partielles de termes positifs

$$S_{n+1} - S_n = (n+1)P(X = n+1) \geq 0.$$

11. La suite  $(S_n)$  est croissante et majorée : elle converge par application du théorème de convergence monotone. La convergence de cette suite revient à la convergence de la série de terme général  $kP(X = k)$  (et même la convergence absolue car elle est à termes positifs), c'est-à-dire à l'existence de l'espérance de  $X$ .
12. (a) La relation obtenue à la question 9 s'écrit aussi

$$nv_n = 6 - 8v_{n+2} - S_n.$$

Or, comme  $(v_n)$  converge vers 0 (car  $(u_n)$  converge vers 1) et que la suite  $(S_n)$  est convergente, il suit que  $(nv_n)$  converge vers une certaine limite que l'on note  $\lambda$  positif (ou nul) car la suite est à termes positifs.



(b) Si  $\lambda$  est non nul, alors  $nv_n \rightarrow \lambda$ , ce qui s'écrit aussi

$$v_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\lambda}{n}.$$

Comme la série  $\sum(\lambda/n)$  diverge (multiple de la série harmonique), le critère d'équivalence (qui s'applique ici car les termes généraux comparés sont tous deux positifs) implique alors que la série  $\sum v_n$  diverge également.

Or, d'après la question 7,

$$\begin{aligned} \sum_{k=2}^n v_k &= \sum_{k=4}^{n+2} v_{k-2} = 8 \sum_{k=4}^{n-2} (v_k - v_{k+1}) \\ &= 8(v_4 - v_{n-1}) \quad (\text{par télescopage}) \\ &\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 8v_4 \end{aligned}$$

ce qui est contradictoire ! On peut donc conclure que  $\lambda = 0$ , ou que  $nv_n$  tend vers 0.

(c) Ainsi,

$$S_n = 6 - 8v_{n+2} - nv_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 6$$

et on retrouve que  $E(X) = 6$ , ce qu'on avait conjecturé à la question 3.(c).

### Exercice 3

1. (a) • Pour  $j = 1$ , on a :

$$P_{(X_n=1)}(X_{n+1} = 1) = \frac{3}{4}, \quad P_{(X_n=1)}(X_{n+1} = 2) = 0, \quad P_{(X_n=1)}(X_{n+1} = 3) = \frac{1}{4}.$$

En effet, si au  $n$ -ième tirage, on a tiré un jeton numéro 1 (et donc si  $X_n = 1$ ), alors on procède au  $(n+1)$ -ième tirage dans la boîte 1 et  $X_{n+1}$  prend la valeur du numéro du jeton obtenu à ce  $(n+1)$ -ième tirage. On a alors  $\frac{3}{4}$  de chance d'obtenir le numéro 1 (car il y a 3 jetons portant le numéro 1) et  $\frac{1}{4}$  de chance d'obtenir le numéro 3 (car il y a 1 jeton portant le numéro 3).

• Pour  $j = 2$ , on a :

$$P_{(X_n=2)}(X_{n+1} = 1) = \frac{1}{2}, \quad P_{(X_n=2)}(X_{n+1} = 2) = 0, \quad P_{(X_n=2)}(X_{n+1} = 3) = \frac{1}{2}.$$

En effet, si au  $n$ -ième tirage, on a tiré un jeton numéro 2 (et donc si  $X_n = 2$ ), alors on procède au  $(n+1)$ -ième tirage dans la boîte 2 et  $X_{n+1}$  prend la valeur du numéro du jeton obtenu à ce  $(n+1)$ -ième tirage. On a alors  $\frac{1}{2}$  de chance d'obtenir le numéro 1 (car il y a 2 jetons portant le numéro 1) et  $\frac{1}{2}$  de chance d'obtenir le numéro 3 (car il y a 2 jetons portant le numéro 3).

• Pour  $j = 3$ , on a :

$$P_{(X_n=3)}(X_{n+1} = 1) = 0, \quad P_{(X_n=3)}(X_{n+1} = 2) = \frac{1}{2}, \quad P_{(X_n=3)}(X_{n+1} = 3) = \frac{1}{2}.$$

En effet, si au  $n$ -ième tirage, on a tiré un jeton numéro 3 (et donc si  $X_n = 3$ ), alors on procède au  $(n+1)$ -ième tirage dans la boîte 3 et  $X_{n+1}$  prend la valeur du numéro du jeton obtenu à ce  $(n+1)$ -ième tirage. On a alors  $\frac{1}{2}$  de chance d'obtenir le numéro 2 (car il y a 2 jetons portant le numéro 2) et  $\frac{1}{2}$  de chance d'obtenir le numéro 3 (car il y a 2 jetons portant le numéro 3).

(b) Avec le système complet d'événements  $((X_n = 1), (X_n = 2), (X_n = 3))$ , on a :

$$(X_{n+1} = 1) = ((X_n = 1) \cap (X_{n+1} = 1)) \cup ((X_n = 2) \cap (X_{n+1} = 1)) \cup ((X_n = 3) \cap (X_{n+1} = 1)).$$

Alors :

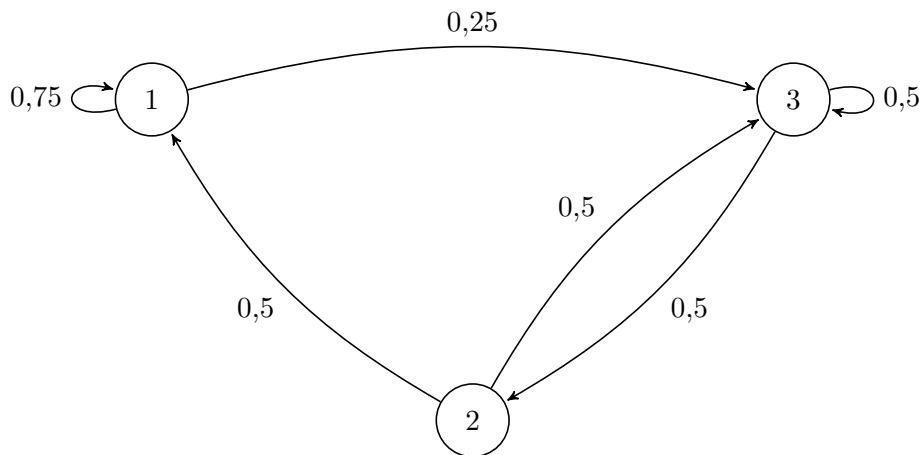
$$\begin{aligned} & P(X_{n+1} = 1) \\ &= P(((X_n = 1) \cap (X_{n+1} = 1)) \cup ((X_n = 2) \cap (X_{n+1} = 1)) \cup ((X_n = 3) \cap (X_{n+1} = 1))) \\ &= P((X_n = 1) \cap (X_{n+1} = 1)) + P((X_n = 2) \cap (X_{n+1} = 1)) + P((X_n = 3) \cap (X_{n+1} = 1)) \\ &= P(X_n = 1)P_{(X_n=1)}(X_{n+1} = 1) + P(X_n = 2)P_{(X_n=2)}(X_{n+1} = 1) \\ &\quad + P(X_n = 3)P_{(X_n=3)}(X_{n+1} = 1) \\ &= \frac{3}{4}P(X_n = 1) + \frac{1}{2}P(X_n = 2), \end{aligned}$$

en utilisant le fait que c'est une union d'événements incompatibles à la deuxième égalité et la formule des probabilités composées à la troisième.

De même, on obtient que :

$$\begin{aligned} P(X_{n+1} = 2) &= P(X_n = 1)P_{(X_n=1)}(X_{n+1} = 2) + P(X_n = 2)P_{(X_n=2)}(X_{n+1} = 2) \\ &\quad + P(X_n = 3)P_{(X_n=3)}(X_{n+1} = 2) \\ &= \frac{1}{2}P(X_n = 3) \\ P(X_{n+1} = 3) &= P(X_n = 1)P_{(X_n=1)}(X_{n+1} = 3) + P(X_n = 2)P_{(X_n=2)}(X_{n+1} = 3) \\ &\quad + P(X_n = 3)P_{(X_n=3)}(X_{n+1} = 3) \\ &= \frac{1}{4}P(X_n = 1) + \frac{1}{2}P(X_n = 2) + \frac{1}{2}P(X_n = 3). \end{aligned}$$

(c) Voici le graphe probabiliste associé :



(d) Avec les questions précédentes,

$$\begin{aligned} U_{n+1} &= (P(X_{n+1} = 1) \quad P(X_{n+1} = 2) \quad P(X_{n+1} = 3)) \\ &= \left( \frac{3}{4}P(X_n = 1) + \frac{1}{2}P(X_n = 2) \quad \frac{1}{2}P(X_n = 3) \quad \frac{1}{4}P(X_n = 1) + \frac{1}{2}P(X_n = 2) + \frac{1}{2}P(X_n = 3) \right) \\ &= (P(X_n = 1) \quad P(X_n = 2) \quad P(X_n = 3)) \times \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ainsi,  $U_{n+1} = U_n M$  avec  $M = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ .

Comme le premier tirage a lieu dans la boîte 1,  $P(X_1 = 1) = 1$ ,  $P(X_1 = 2) = 0$  et  $P(X_1 = 3) = 0$ . Donc  $U_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ .

(e) Voici la fonction `loideX` :

```

1 | def loideX(n):
2 |     U = np.array([1, 0, 0])
3 |     M = np.array([[3/4, 0, 1/4], [1/2, 0, 1/2], [0,
4 | 1/2, 1/2]])
5 |     for k in range(2,n+1):
6 |         U = np.dot(U,M)
7 |     return(U)

```

(f) Les instructions de l'énoncé permettent de calculer les probabilités théoriques de chacun des états (c'est-à-dire  $P(X_n = 1)$ ,  $P(X_n = 2)$ ,  $P(X_n = 3)$ ) pour  $n$  allant de 1 à 10 et de stocker celles-ci dans la matrice  $A$ . En d'autres termes, la matrice  $A$  est une matrice de taille  $10 \times 3$  dont les lignes sont  $U_1, U_2, \dots, U_{10}$ .

Le graphique représente l'évolution des probabilités  $P(X_n = 1)$ ,  $P(X_n = 2)$ ,  $P(X_n = 3)$  lorsque  $n$  varie de 1 à 10. L'expérience semble converger rapidement vers un état stable lorsque  $n$  augmente, et on peut remarquer que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P(X_n = 1) = \frac{2}{5}, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} P(X_n = 2) = \frac{1}{5} \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} P(X_n = 3) = \frac{2}{5}.$$

2. (a) Voici la fonction `esperancedeX` :

```

1 | def esperancedeX(n):
2 |     U = loideX(n)
3 |     return(1*U[0]+2*U[1]+3*U[2])

```

(b) On a :

$$\begin{aligned}
 ML &= \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{2}{2} \\ \frac{5}{2} \end{pmatrix} \\
 &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \times L + 1 \times J
 \end{aligned}$$

Donc  $\alpha = \frac{1}{2}$  et  $\beta = 1$ .

(c)  $U_n L = 1 \times P(X_n = 1) + 2 \times P(X_n = 2) + 3 \times P(X_n = 3) = E(X_n)$ .

$U_n J = P(X_n = 1) + P(X_n = 2) + P(X_n = 3) = 1$  (car  $(X_n = 1)$ ,  $(X_n = 2)$ ,  $(X_n = 3)$  est un système complet d'événements).

Donc, en multipliant la relation  $LM = \frac{1}{2}L + J$  par  $U_n$  à gauche, on obtient :

$$U_n ML = \frac{1}{2}U_n L + U_n J = \frac{1}{2}E(X_n) + 1.$$

Avec la question 1.(c),

$$LMU_n = LU_{n+1} = 1 \times P(X_{n+1} = 1) + 2 \times P(X_{n+1} = 2) + 3 \times P(X_{n+1} = 3) = E(X_{n+1}).$$

On obtient finalement la relation  $E(X_{n+1}) = \frac{1}{2}E(X_n) + 1$ .

(d) En posant  $u_n = E(X_n)$ , on a :  $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 1$ .

$$\text{Et } u_1 = E(X_1) = 1 \times P(X_1 = 1) + 2 \times P(X_1 = 2) + 3 \times P(X_1 = 3) = 1 \times 1 + 2 \times 0 + 3 \times 0 = 1.$$

Donc  $(u_n)$  est une suite arithmético-géométrique.

On résout l'équation  $x = \frac{1}{2}x + 1 \Leftrightarrow \frac{1}{2}x = 1 \Leftrightarrow x = 2$ .

On pose  $v_n = u_n - 2$  et on montre que  $(v_n)$  est géométrique :

$$v_{n+1} = u_{n+1} - 2 = \frac{1}{2}u_n + 1 - 2 = \frac{1}{2}u_n - 1 = \frac{1}{2}(u_n - 2) = \frac{1}{2}v_n.$$

Donc  $(v_n)$  est géométrique de raison  $\frac{1}{2}$  et de premier terme  $v_1 = u_1 - 2 = -1$ . Donc, pour tout entier  $n \geq 1$ ,

$$v_n = -\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \quad \text{et} \quad u_n = 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}.$$

Ainsi, pour tout entier  $n \geq 1$ ,  $E(X_n) = 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ .

Et comme  $\frac{1}{2} \in ]-1, 1[$ , on obtient  $\lim_{n \rightarrow +\infty} E(X_n) = 2$ .

3. (a) Voici la fonction `boitesuivante(i)` :

```

1 | def boitesuivante(i):
2 |     j = i
3 |     r = rd.random()
4 |     if j == 1:
5 |         if r < 1/4 :
6 |             j = 3
7 |     elif j == 2:
8 |         if r < 1/2 :
9 |             j = 1
10 |         else:
11 |             j = 3
12 |     else:
13 |         if r < 1/2 :
14 |             j = 2
15 |     return(j)

```

(b) Voici la fonction `simulX` :

```

1 | def simulX(n):
2 |     i = 1
3 |     for k in range(n):
4 |         i = boitesuivante(i)
5 |     return(i)

```

(c) La variable `L` est une matrice ligne qui contient 10000 simulations de la variable aléatoire  $X_{10}$ . Les résultats obtenus confirment ceux de la question 1.(f). En effet, les fréquences d'apparitions des trois états de  $X_{10}$  correspondent aux probabilités théoriques qu'on peut lire sur le graphique donné à la question 1.(f) :

- Pour l'état 1 :  $0,4007 \simeq \frac{2}{5}$ .
  - Pour l'état 2 :  $0,2029 \simeq \frac{1}{5}$ .
  - Pour l'état 3 :  $0,3964 \simeq \frac{2}{5}$ .
- (d) L'instruction `mean(L)` permet d'obtenir la moyenne des termes de la liste `L`. Le résultat obtenu est proche de l'espérance théorique de  $X_{10}$  :  $1,9957 \simeq 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^{10-1}$
-