DS 11 (A)

Devoir surveillé du Samedi 22 Mars

La calculatrice est interdite. Durée : 4h

Exercice 1

Partie 1

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = x^3 - 3x.$$

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f.

1. Étudier la parité de f sur $\mathbb{R}$.

2. Déterminer les variations de f sur $[0, +\infty[$, et calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

3. Montrer que f est convexe sur $[0, +\infty[$ et justifier que le point d'abscisse 0 est un point d'inflexion de la courbe $\mathscr{C}$.

4. On note T la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0.

   Déterminer une équation de T et préciser la position relative de $\mathscr{C}$ par rapport à T.

5. Tracer, sur une même figure, l'allure de la courbe $\mathscr{C}$ (sur $\mathbb{R}$) et de la droite T.

6. Soit a un réel.

   (a) Montrer que, si $|a| < 2$, alors l'équation $x^3 - 3x + a = 0$, d'inconnue x, possède exactement trois solutions réelles.

   (b) Montrer que, si $|a| > 2$, alors l'équation $x^3 - 3x + a = 0$, d'inconnue x, possède une unique solution réelle.

Partie 2

Pour tout réel a, on considère la matrice :

$$A_a = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

7. (a) Calculer $A_a^3 - 3A_a + aI_3$.

   (b) Soient λ un réel tel que $\lambda^3 - 3\lambda + a = 0$, et soit $X = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ \lambda^2 \end{pmatrix}$.

   Exprimer A_aX en fonction de λ et de X.

   (c) Déduire des deux questions précédentes que pour tout réel λ :
   λ est valeur propre de $A_a \iff \lambda^3 - 3\lambda + a = 0$.

8. **Dans cette question uniquement**, on suppose $a = 2$.

   (a) Déterminer les valeurs propres et une base de chaque sous-espace propre de A_2.

   (b) La matrice A_2 est-elle diagonalisable ?

9. **Dans cette question uniquement**, on suppose $|a| > 2$.

   La matrice A_a est-elle diagonalisable ?

   Indication : On pourra utiliser le résultat de la question 6.

10. **Dans cette question uniquement**, on suppose $a \in \,]-2, 2[$.

    (a) Montrer que A_a est diagonalisable.
    <u>Indication :</u> On pourra utiliser le résultat de la question 6.

    (b) On note α, β, γ les valeurs propres de A_a. On considère les deux matrices suivantes :

$$D = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha^2 & \beta^2 & \gamma^2 \end{pmatrix}$$

    Justifier que P est inversible. Exprimer A_a en fonction de D et P.

Partie 3

Pour tout réel a, on considère l'équation différentielle $(\mathscr{E}_a)$ suivante, d'inconnue $y : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ trois fois dérivable sur $\mathbb{R}$:

$$(\mathscr{E}_a) : \quad y''' - 3y' + ay = 0.$$

11. Dans cette question uniquement, on suppose que $a = 0$.

    (a) Soit y une solution de l'équation $(\mathscr{E}_0)$: $y''' - 3y' = 0$. Déterminer la forme générale de la fonction y'.

    (b) En déduire l'ensemble des solutions de l'équation $(\mathscr{E}_0)$.

Dans la suite de l'exercice, pour toute fonction y trois fois dérivable sur $\mathbb{R}$, on note :

$$Y = \begin{pmatrix} y \\ y' \\ y'' \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Y' = \begin{pmatrix} y' \\ y'' \\ y''' \end{pmatrix}.$$

12. Montrer que, pour tout réel a, y est solution de l'équation différentielle $(\mathscr{E}_a)$ si et seulement si $Y' = A_a Y$.

13. **Dans cette question uniquement**, on suppose $a \in \,]-2, 2[$.

    (a) Montrer qu'une fonction $y : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est solution de l'équation différentielle $(\mathscr{E}_a)$ si et seulement si $Z' = DZ$, où $Z = P^{-1}Y$, où D et P sont définies à la question 10.(b).

    (b) Montrer que les solutions de l'équation différentielle $(\mathscr{E}_a)$ sont les fonctions y définies par une expression de la forme :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y(x) = \lambda_1 e^{\alpha x} + \lambda_2 e^{\beta x} + \lambda_2 e^{\gamma x},$$

    où $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ sont des réels.

    (c) Vérifier en particulier que les résultats de 11.(b) et 13.(b) sont cohérents.

Exercice 2

Dans tout l'exercice, a est un réel strictement positif.

Partie A

On considère la fonction φ définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $\forall x > 0, \varphi(x) = \ln(x) - ax^{2a}$.

1. Déterminer $\lim\limits_{x \to 0} \varphi(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \varphi(x)$.

2. Étudier les variations de φ et dresser son tableau de variations.

   On fera apparaître dans ce tableau le réel $x_0 = \left(\dfrac{1}{2a^2}\right)^{(1/2a)}$.

3. Démontrer que si $a < \sqrt{\dfrac{1}{2e}}$, l'équation $\varphi(x) = 0$ admet exactement deux solutions z_1 et z_2, vérifiant : $z_1 < x_0 < z_2$.

   Que se passe-t-il si $a = \sqrt{\dfrac{1}{2e}}$? Si $a > \sqrt{\dfrac{1}{2e}}$?

Partie B

Soit f la fonction définie sur l'ouvert $U = (\mathbb{R}_+^*)^2$ par :

$$\forall (x,y) \in U,\ f(x,y) = \ln(x)\ln(y) - (xy)^a.$$

4. Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur U.

5. Calculer les dérivées partielles premières de f.

6. Démontrer que pour tout $(x,y) \in U$:

$$(x,y) \text{ est un point critique de } f \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = y, \\ \varphi(x) = 0. \end{cases}$$

7. Démontrer que si $a < \sqrt{\dfrac{1}{2e}}$, la fonction f admet exactement deux points critiques : (z_1, z_1) et (z_2, z_2), où z_1 et z_2 sont les réels définis dans la partie A.

   Déterminer aussi les éventuels points critiques de f dans les cas où $a = \sqrt{\dfrac{1}{2e}}$ et $a > \sqrt{\dfrac{1}{2e}}$.

Partie C

Dans cette partie, on suppose que $a < \sqrt{\dfrac{1}{2e}}$. On rappelle alors que la fonction f admet exactement deux points critiques : (z_1, z_1) et (z_2, z_2), où z_1 et z_2 sont les réels définis dans la partie A.

8. Calculer les dérivées partielles d'ordre 2 de la fonction f.

9. Calculer la matrice hessienne de f au point (z_1, z_1). Vérifier que cette matrice peut s'écrire sous la forme :

$$\nabla^2(f)(z_1, z_1) = \begin{pmatrix} -a^2 {z_1}^{2a-2} & \dfrac{1}{{z_1}^2} - a^2 {z_1}^{2a-2} \\ \dfrac{1}{{z_1}^2} - a^2 {z_1}^{2a-2} & -a^2 {z_1}^{2a-2} \end{pmatrix}.$$

10. On pose $M = \nabla^2(f)(z_1, z_1)$, $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $X_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

    Calculer MX_1 et MX_2, et en déduire les valeurs propres de M.

11. La fonction f présente-t-elle un extremum local en (z_1, z_1)?

    Si oui, est-ce un minimum ? Un maximum ?

12. La fonction f présente-t-elle un extremum local en (z_2, z_2)?

    Si oui, est-ce un minimum ? Un maximum ?

Exercice 3

Une urne contient une boule blanche et une boule noire, les boules étant indiscernables au toucher. On y prélève une boule, chaque boule ayant la même probabilité d'être tirée, on note sa couleur, et on la remet dans l'urne avec c boules de la couleur de la boule tirée. On répète cette épreuve, on réalise ainsi une succession de n tirages ($n \geq 2$).

I. Étude du cas $c = 0$.

On effectue donc ici n tirages avec remise de la boule dans l'urne.

On note X la variable aléatoire réelle égale au nombre de boules blanches obtenues au cours des n tirages et Y la variable aléatoire réelle définie par :

$$\begin{cases} Y = k & \text{si l'on obtient une boule blanche pour la première fois au } k^{\text{ème}} \text{ tirage.} \\ Y = 0 & \text{si les } n \text{ boules tirées sont noires.} \end{cases}$$

1. (a) Déterminer la loi de X. Donner la valeur de $E(X)$ et de $V(X)$.

   (b) i. Compléter le programme `Python` suivant qui effectue 1000 simulations de la variable X et enregistre les 1000 modalités obtenues dans un vecteur `s` :

```python
n = input('Entrer le nombre n de tirages : ')
s = .....
```

   ii. Rajouter une instruction à la suite qui affiche une valeur approchée de l'espérance de X obtenue grâce à ces 1000 simulations.

2. Pour $k \in \{1, \ldots, n\}$, déterminer la probabilité $P(Y = k)$ de l'évènement $(Y = k)$, puis déterminer $P(Y = 0)$.

3. Vérifier que :
$$\sum_{k=0}^{n} P(Y = k) = 1.$$

4. Pour $x \neq 1$ et n entier naturel non nul, montrer que :
$$\sum_{k=1}^{n} kx^k = \frac{nx^{n+2} - (n+1)x^{n+1} + x}{(1-x)^2}.$$

5. En déduire $E(Y)$.

II. Étude du cas $c \neq 0$.

On considère les variables aléatoires $(X_i)_{1 \leq i \leq n}$ définies par :

$$\begin{cases} X_i = 1 & \text{si on obtient une boule blanche au } i^{\text{ème}} \text{ tirage.} \\ X_i = 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On définit alors, pour $2 \leq p \leq n$, la variable aléatoire Z_p, par :

$$Z_p = \sum_{i=1}^{p} X_i.$$

6. Que représente la variable Z_p ?

7. Donner la loi de X_1 et l'espérance $E(X_1)$ de X_1.

8. Déterminer la loi du couple (X_1, X_2). En déduire la loi de X_2 puis l'espérance $E(X_2)$.

9. Déterminer la loi de probabilité de Z_2.

10. Déterminer l'univers image $Z_p(\Omega)$ de Z_p.

11. Soit $p \leq n-1$.

    (a) Déterminer $P_{(Z_p=k)}(X_{p+1}=1)$ pour $k \in Z_p(\Omega)$.

    (b) Montrer que :
$$P(X_{p+1}=1) = \frac{1+cE(Z_p)}{2+pc}.$$

    (c) En déduire que X_p est une variable aléatoire de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$.
    On raisonnera par récurrence forte sur p : les variables X_1, X_2, ..., X_p étant supposées suivre une loi de de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$, et on calculera $E(Z_p)$.

12. Compléter le programme `Python` suivant qui, étant donné c, effectue une simulation des 10 variables : X_1, X_2 , ..., X_{10}, les mémorise dans un vecteur ligne nommé `X`, et affiche les valeurs obtenues :

```
c = input('entrer la valeur de c')
X = np.zeros(10)

n = 1 #désigne le nombre de boules noires
b = 1 #désigne le nombre de boules blanches
for i in range(10):
    if rd.random() < b/(b+n) :
        X[i] = .....
        n = .....
        b = .....
    else:
        X[i] = .....
        n = .....
        b = .....
print(X)
```