DS 12 (A)

# Devoir surveillé du Samedi 29 Mars

La calculatrice est interdite. Durée : 4h

## Exercice 1

Dans tout cet exercice, $f$ désigne la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par :

$$\forall x \in ]0,+\infty[, \quad f(x) = x - \ln(x).$$

### Partie I : Étude de la fonction $f$

1. Dresser le tableau de variations de $f$ en précisant ses limites en 0 et en $+\infty$.
2. Montrer que l'équation $f(x) = 2$, d'inconnue $x \in ]0,+\infty[$, admet exactement deux solutions, que l'on note $a$ et $b$, telles que $0 < a < 1 < b$.
3. Montrer : $b \in [2;4]$. On note $\ln(2) \approx 0,7$.

### Partie II : Étude d'une suite

On pose : $u_0 = 4$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \ln(u_n) + 2$.

4. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et que l'on a : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \in [b,+\infty[$.
5. Déterminer la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. En déduire qu'elle converge et préciser sa limite.
6. (a) Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - b \leq \dfrac{1}{2}(u_n - b)$.

   (b) En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n - b \leq \dfrac{1}{2^{n-1}}$.
7. (a) Écrire une fonction Python d'en-tête `def suite(n)` qui, prenant en argument un entier $n$ de $\mathbb{N}$, renvoie la valeur de $u_n$.

   (b) Recopier et compléter la fonction Python suivante afin que, prenant en argument un réel `epsilon` strictement positif, elle renvoie une valeur approchée de $b$ à `epsilon` près.

```
def valeur_approchee(epsilon):
  n = 0
  while ..... :
    n = n+1
  return(suite(n))
```

### Partie III : Étude d'une fonction définie par une intégrale

On note $\Phi$ la fonction donnée par :

$$\Phi(x) = \int_x^{2x} \frac{1}{f(t)}\, dt.$$

8. Montrer que $\Phi$ est bien définie et dérivable sur $]0,+\infty[$, et que l'on a :

$$\forall x \in ]0,+\infty[, \quad \Phi'(x) = \frac{\ln(2) - \ln(x)}{(x - \ln(x))(2x - \ln(2x))}.$$

9. En déduire les variations de $\Phi$ sur $]0,+\infty[$.
10. Montrer : $\forall x \in ]0,+\infty[$, $0 \leq \Phi(x) \leq x$.

11. (a) Montrer que $\Phi$ est prolongeable par continuité en 0.
    On note encore $\Phi$ la fonction ainsi prolongée. Préciser alors $\Phi(0)$.
    (b) Montrer : $\lim_{x\to 0} \Phi'(x) = 0$.
    On admet que la fonction $\Phi$ est alors dérivable en 0 et que $\Phi'(0) = 0$.

12. On donne $\Phi(2) \approx 1,1$ et on admet que $\lim_{x\to+\infty} \Phi(x) = \ln(2) \approx 0,7$.

    Tracer l'allure de la courbe représentative de $\Phi$ ainsi que la tangente à la courbe au point d'abscisse 0.

**Partie IV : Étude d'une fonction de deux variables**

On considère la fonction $H$ de classe $\mathscr{C}^2$ sur l'ouvert $U = ]0,+\infty[\times\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall (x,y) \in ]0,+\infty[^2, \quad H(x,y) = \frac{x^2}{2} - xy - 2x + e^y.$$

13. (a) Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 de $H$ en tout $(x,y)$ de $U$.
    (b) Montrer que la fonction $H$ admet exactement deux points critiques : $(a,\ln(a))$ et $(b,\ln(b))$, où les réels $a$ et $b$ sont ceux introduits dans la question 2.

14. (a) Écrire la matrice hessienne, notée $M_a$, de $H$ au point $(a,\ln(a))$.
    (b) Montrer que $M_a$ admet deux valeurs propres distinctes, notées $\lambda_1$ et $\lambda_2$, vérifiant :

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 & = a+1 \\ \lambda_1\lambda_2 & = a-1. \end{cases}$$

    (c) La fonction $H$ présente-t-elle un extremum local au point $(a,\ln(a))$ ?

15. La fonction $H$ présente-t-elle un extremum local au point $(b,\ln(b))$ ?

---

## Exercice 2

**Partie I - Un premier système différentiel.**

On considère le système différentiel

$$(S) \begin{cases} x' = 3x + y + z \\ y' = x + 3y + z \\ z' = x + y + 3z \end{cases}$$

où $x$, $y$ et $z$ désignent des fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

1. (a) Déterminer la matrice $A$ associée au système différentiel $(S)$.
   (b) Donner les instructions en langage `Python` pour :
   - importer la librairie `numpy` avec le raccourci `np` ;
   - importer la librairie `numpy.linalg` avec le raccourci `al` ;
   - définir une variable `A` contenant la matrice $A$.

   (c) Après les instructions de la question précédente que l'on suppose correctement entrées dans la console, on entre les commandes suivantes et on constate les résultats retournés par `Python` :

```
>>> al.matrix_rank(A-2*np.eye(3,3))
1
>>> al.matrix_rank(A-5*np.eye(3,3))
2
```

Que peut-on en déduire sur les valeurs propres de $A$ et les sous-espaces propres de $A$ ?

(d) Déterminer, par le calcul, les valeurs propres et les sous-espaces propres de $A$.

(e) Justifier que $A$ est diagonalisable et donner une matrice $D \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ diagonale et une matrice $P \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ inversible telle que $A = PDP^{-1}$ (on ne demande pas de préciser la matrice $P^{-1}$).

2. Résoudre le système différentiel $(S)$.

3. (a) Quel résultat permet d'affirmer l'existence d'une unique solution $X_0 : t \mapsto \begin{pmatrix} x_0(t) \\ y_0(t) \\ z_0(t) \end{pmatrix}$ du système différentiel $(S)$ telle que $X_0(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ?

(b) Déterminer la solution $X_0$ de la question précédente.

**Partie II - Un second système différentiel.**

Dans cette partie, on considère la matrice $B = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

4. (a) Déterminer les valeurs propres de $B$.

(b) La matrice $B$ est-elle diagonalisable ?

5. On note $f$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ tel que $B$ est la matrice de $f$ dans la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^2$. On considère aussi les vecteurs $v_1 = (2, -1)$ et $v_2 = (-1, 0)$.

(a) Justifier que $\mathcal{B}' = (v_1, v_2)$ est une base de $\mathbb{R}^2$.

(b) Quelle est la matrice $T$ de l'endomorphisme $f$ dans la base $\mathcal{B}'$ ?

(c) Donner une matrice $Q$ inversible telle que $B = QTQ^{-1}$.

6. On considère le système différentiel

$$(\Sigma) \quad \begin{cases} x' = -x - 4y \\ y' = x + 3y \end{cases},$$

où $x$ et $y$ sont des fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ à valeurs réelles.

(a) On note $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $Y = Q^{-1}X$. Montrer que : $X' = BX \Leftrightarrow Y' = TY$.

(b) Vérifier que $t \mapsto te^t$ est une solution particulière de l'équation différentielle $y' - y = e^t$.

(c) Déterminer les solutions du système différentiel $Y' = TY$.

(d) En déduire l'ensemble des solutions du système différentiel $(\Sigma)$.

---

## Exercice 3

On considère une urne contenant initialement une boule bleue et deux boules rouges.

On effectue, dans cette urne, des tirages successifs de la façon suivante : on pioche une boule au hasard, on note sa couleur, puis on la replace dans l'urne en ajoutant une boule de la même couleur que celle qui vient d'être obtenue.

Pour tout $k$ de $\mathbb{N}^*$, on note $B_k$ l'événement : "on obtient une boule bleue au $k$-ième tirage" et $R_k$ l'événement : "on obtient une boule rouge au $k$-ième tirage".

### Partie I : Simulation informatique

1. Recopier et compléter la fonction suivante afin qu'elle simule l'expérience étudiée et renvoie le nombre de boules rouges obtenues lors des $n$ premiers tirages, l'entier $n$ étant entré en argument.

```python
def EML(n):
    b = 1 #nombre de boules bleues présentes dans l'urne
    r = 2 #nombre de boules rouges présentes dans l'urne
    s = 0 #nombre de boules rouges obtenues lors des n tirages
    for k in range(n):
        x = rd.random()
        if ..... :
            .....
        else:
            .....
    return(s)
```

2. On exécute le programme suivant :

```python
n = 10
m = 0
for i in range(1000):
    m = m+EML(n)
print(m/1000)
```

On obtient `6.657`. Comment interpréter ce résultat ?

### Partie II : Rang d'apparition de la première boule bleue et rang d'apparition de la première boule rouge

On définit la variable aléatoire $Y$ égale au rang d'apparition de la première boule bleue et la variable aléatoire $Z$ égale au rang d'apparition de la première boule rouge.

3. (a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad P(Y = n) = \dfrac{2}{(n+1)(n+2)}$.
   (b) La variable aléatoire $Y$ admet-elle une espérance ? une variance ?

4. Déterminer la loi de $Z$. La variable aléatoire $Z$ admet-elle une espérance ? une variance ?

### Partie III : Nombre de boules rouges obtenues au cours de $n$ tirages

On définit, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, la variable aléatoire $X_k$ égale à 1 si on obtient une boule rouge au $k$-ième tirage et égale à 0 sinon.
On définit, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la variable aléatoire $S_n$ égale au nombre de boules rouges au cours des $n$ premiers tirages.

5. Donner, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, une relation entre $S_n$ et certaines variables aléatoires $X_k$ pour $k \in \mathbb{N}^*$.

6. Déterminer la loi de $X_1$, son espérance et sa variance.

7. (a) Déterminer la loi du couple $(X_1, X_2)$.
   (b) En déduire la loi de $X_2$.
   (c) Les variables aléatoires $X_1$ et $X_2$ sont-elles indépendantes ?

8. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in [\![0, n]\!]$.
   (a) Calculer $P(R_1 \cap \ldots \cap R_k \cap B_{k+1} \cap \ldots \cap B_n)$.

(b) Justifier que : $P(S_n = k) = \binom{n}{k} P(R_1 \cap \ldots \cap R_k \cap B_{k+1} \cap \ldots \cap B_n)$.

En déduire que : $P(S_n = k) = \dfrac{2(k+1)}{(n+1)(n+2)}$.

9. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n$ admet une espérance et $E(S_n) = \dfrac{2n}{3}$.

10. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

(a) Montrer que : $\forall k \in [\![0; n]\!], \quad P_{(S_n=k)}(X_{n+1} = 1) = \dfrac{k+2}{n+3}$.

(b) En déduire que : $P(X_{n+1} = 1) = \dfrac{E(S_n)+2}{n+3}$.

(c) Déterminer alors la loi de la variable aléatoire $X_{n+1}$. Que remarque-t-on ?

**Partie IV : Étude d'une convergence en loi**

On s'intéresse dans cette partie à la proportion de boules rouges obtenues lors des $n$ premiers tirages. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $T_n = \dfrac{S_n}{n}$.

11. Justifier, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ :

$$\forall x < 0, \quad P(T_n \leq x) = 0 \quad \text{et} \quad \forall x > 1, \quad P(T_n \leq x) = 1.$$

12. Soit $x \in [0; 1]$. Montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ :

$$P(T_n \leq x) = \frac{(\lfloor nx \rfloor + 1)(\lfloor nx \rfloor + 2)}{(n+1)(n+2)}$$

où $\lfloor . \rfloor$ désigne la fonction partie entière.

13. En déduire que la suite de variables aléatoires $(T_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire à densité, dont on précisera la fonction de répartition et une densité.

---