DS 3 (A)

Devoir surveillé du Mercredi 6 Novembre

La calculatrice est interdite. Durée : 4h

Exercice 1

Pour tout entier naturel n non nul, on note f_n la fonction définie par : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f_n(x) = x - n\ln(x)$.

1. (a) Étudier cette fonction et dresser son tableau de variation.
   (b) En déduire, lorsque n est supérieur ou égal à 3, l'existence de deux réels u_n et v_n solutions de l'équation $f_n(x) = 0$ et vérifiant $0 < u_n < n < v_n$.
2. Étude de la suite $(u_n)_{n\geq 3}$.
   (a) Montrer que : $\forall n \geq 3, 1 < u_n < e$.
   (b) Montrer que $f_n(u_{n+1}) = \ln(u_{n+1})$, puis en conclure que (u_n) est décroissante.
   (c) En déduire que $(u_n)_{n\geq 3}$ converge et montrer, en encadrant $\ln(u_n)$, que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$.
   (d) Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln(u_n)}{u_n - 1} = 1$. En déduire que $u_n - 1 \sim \dfrac{1}{n}$.
3. Étude de la suite $(v_n)_{n\geq 3}$.
   (a) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.
   (b) Calculer $f_n(n\ln(n))$ puis montrer que : $\forall n \geq 3,\ n\ln(n) < v_n$.
   (c) Soit g la fonction définie par : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ g(x) = x - 2\ln(x)$.
   Étudier g et donner son signe. En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ n > 2\ln(n)$.
   (d) En déduire le signe de $f_n(2n\ln(n))$, puis établir que : $\forall n \geq 3,\ v_n < 2n\ln(n)$.
   (e) Montrer enfin que : $\ln(v_n) \sim \ln(n)$.

Exercice 2

Pour tout entier naturel n non nul, on pose $u_n = 1/\binom{n+p}{n}$, où p désigne un entier naturel fixé.

1. Montrer que si $p = 0$ ou si $p = 1$ la série de terme général u_n diverge.

On suppose dans toute la suite que p est supérieur ou égal à 2 et on pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k$.

2. (a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ (n+p+2)\,u_{n+2} = (n+2)\,u_{n+1}$.
   (b) En déduire par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ que : $S_n = \dfrac{1-(n+p+1)\,u_{n+1}}{p-1}$.
3. (a) On pose $v_n = (n+p)u_n$. Montrer que la suite (v_n) est décroissante.
   (b) En déduire que la suite (v_n) converge et que sa limite ℓ est positive ou nulle.
   (c) Utiliser le résultat précédent pour montrer que la série de terme général u_n converge et donner sa somme en fonction de p et de ℓ.
4. On suppose dans cette question seulement que $\ell \neq 0$.
   (a) Montrer qu'au voisinage de $+\infty$, $u_n \sim \dfrac{\ell}{n}$.
   (b) En déduire une contradiction avec la troisième question.
5. Donner la valeur de ℓ et en déduire en fonction de p, la somme de la série de terme général u_n.

Exercice 3

On considère les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. (a) Déterminer $(A - I)^2$.
   (b) En déduire que A est inversible et écrire A^{-1} comme combinaison linéaire de I et A.

2. On pose $A = B + I$.
   (a) Exprimer pour tout entier naturel n, la matrice A^n comme combinaison linéaire de I et B, puis l'écrire comme combinaison linéaire de I et A.
   (b) Vérifier que l'expression précédente est aussi valable pour $n = -1$.

3. (a) Utiliser la première question pour déterminer la seule valeur propre de A.
   (b) En déduire si A est ou n'est pas diagonalisable.

4. (a) Donner les instructions en langage `Python` pour :
   - importer la librairie `numpy` avec le raccourci `np` ;
   - importer la librairie `numpy.linalg` avec le raccourci `al` ;
   - définir une variable `A` contenant la matrice A.

   (b) Après les instructions de la question précédente que l'on suppose correctement entrées dans la console, on entre la commande suivante et on constate le résultat retourné par `Python` :

   ```
   >>> al.matrix_rank(A-np.eye(3,3))
   1
   ```

   Que calcule-t-on avec cette dernière instruction ? En déduire la dimension du seul sous-espace propre de A.
   (c) Déterminer une base du seul sous-espace propre de A et retrouver le résultat obtenu à la question précédente.

5. (a) Justifier l'inversibilité de P et déterminer P^{-1}.
   (b) Calculer la matrice $T = P^{-1}AP$

6. On souhaite déterminer l'ensemble :

$$C_A = \{M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}) \mid AM = MA\}.$$

   (a) On pose le changement de variable $N = P^{-1}MP$. Établir l'équivalence :

$$AM = MA \quad \Leftrightarrow \quad TN = NT.$$

   (b) Montrer l'équivalence :

$$TN = NT \quad \Leftrightarrow \quad N = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \text{ avec } a, b, c, d, e \in \mathbb{R}.$$

   (c) En déduire C_A sous la forme d'un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ engendré par 5 matrices qu'on exprimera à l'aide des matrices P, P^{-1} et $E_{i,j}$ (matrices dont tous les coefficients sont nuls sauf celui situé à l'intersection de la i-ème ligne et de la j-ème colonne qui vaut 1).

Exercice 4

On lance une pièce équilibrée.
On note Z la variable aléatoire égale au rang du lancer où l'on obtient le premier "pile".
Après cette série de lancers, si Z a pris la valeur k ($k \in \mathbb{N}^*$), on remplit une urne de k boules numérotées $1, 2, \ldots, k$, puis on extrait au hasard une boule de cette urne.
On note X la variable aléatoire égale au numéro de la boule tirée après la procédure décrite ci-dessus.

1. On suppose dans cette question qu'on a importé sur `Python` les librairies `numpy` avec le raccourci `np` et `numpy.random` avec le raccourci `rd`.

   (a) On rappelle que la commande :

   - `rd.randint(a, b+1)` retourne un nombre choisi aléatoirement suivant la loi $\mathcal{U}(\llbracket a, b \rrbracket)$;
   - `rd.binomial(n, p)` retourne un nombre choisi aléatoirement suivant la loi $\mathcal{B}(n, p)$;
   - `rd.geometric(p)` retourne un nombre choisi aléatoirement suivant la loi $\mathcal{G}(p)$;
   - `rd.poisson(lambda)` retourne un nombre choisi aléatoirement suivant la loi $\mathcal{P}(\lambda)$.

   Compléter la fonction `simulX()` suivante pour qu'elle simule l'expérience aléatoire décrite dans ce problème et retourne la valeur prise par X.

```python
def simulX() :
    Z = .....
    X = .....
    return(X)
```

   (b) On ajoute les instructions suivantes à la suite du programme précédent :

```python
S = np.zeros(10000)
for k in range(10000) :
    S[k] = simulX()
print(np.mean(S))
```

   Expliquer ce que fait ce programme.

   (c) Après exécution, `Python` retourne la valeur `1.5149`. Comment interpréter ce résultat ?

2. Établir la convergence de la série de terme général $\dfrac{1}{k}\left(\dfrac{1}{2}\right)^k$ ($k \in \mathbb{N}^*$).

3. Rappeler la loi de Z ainsi que son espérance et sa variance.

4. (a) Pour tout couple (i, k) de $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$, déterminer la probabilité $P_{(Z=k)}(X = i)$.

   (b) En déduire que : $\forall i \in \mathbb{N}^*,\ P(X = i) = \displaystyle\sum_{k=i}^{+\infty} \frac{1}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k$.

   (c) On admet dans cette question que $\displaystyle\sum_{i=1}^{+\infty}\sum_{k=i}^{+\infty} = \sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{i=1}^{k}$. Vérifier que $\displaystyle\sum_{i=1}^{+\infty} P(X = i) = 1$.

5. (a) Montrer que, pour tout entier naturel i non nul, on a : $iP(X = i) \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^{i-1}$.

   (b) En déduire que X possède une espérance.

   (c) Montrer, en admettant qu'il est licite de permuter les symboles $\sum$ comme dans la question 4.(c), que
   $$E(X) = \frac{3}{2}$$

6. (a) Utiliser le résultat de la question 5.(a) pour montrer que X a un moment d'ordre 2.

(b) Établir, alors, toujours en admettant qu'il est licite de permuter les symboles $\sum$ comme dans la question 4.(c), que

$$E\left(X^2\right) = \frac{1}{6}\sum_{k=1}^{+\infty}(k+1)(2k+1)\left(\frac{1}{2}\right)^k.$$

(c) Déterminer les réels a, b et c tels que : $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ (k+1)(2k+1) = ak(k-1) + bk + c$.

(d) En déduire la valeur de $E\left(X^2\right)$ et vérifier que $V(X) = \dfrac{11}{12}$.

7. On admet que, si une variable aléatoire X admet une variance, alors on a :

$$\forall \varepsilon > 0,\ P(|X - E(X)| \geq \varepsilon) \leq \frac{V(X)}{\varepsilon^2} \quad \text{(Inégalité de Bienaymé-Chebychev).}$$

En utilisant ce résultat, montrer que $P(X \geq 3) \leq \dfrac{11}{27}$.

8. On se propose de calculer $P(X = 1)$, $P(X = 2)$ et $P(X \geq 3)$.

(a) Écrire explicitement en fonction de x et n la somme $\sum\limits_{k=1}^{n} x^{k-1}$ (n désignant un entier naturel non nul et x un réel différent de 1).

(b) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k = \ln(2) - \int_0^{1/2}\frac{x^n}{1-x}dx$.

(c) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leq \displaystyle\int_0^{1/2}\frac{x^n}{1-x}dx \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

En déduire la valeur de $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^{1/2}\frac{x^n}{1-x}dx$.

(d) Établir alors que $P(X = 1) = \ln(2)$ puis donner la valeur de $P(X = 2)$.

(e) Utiliser les résultats précédents pour calculer $P(X \geq 3)$, puis donner une valeur approchée de $P(X \geq 3)$ en prenant $\ln(2) \simeq 0,7$.