

DS 3 (B)

Devoir surveillé du Mercredi 6 Novembre

La calculatrice est interdite. Durée : 4h

Exercice 1

On note $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre 3 à coefficients réels.

On pose pour toute matrice $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq 3} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$:

- $s_1(A) = \sum_{j=1}^3 a_{1,j}$, $s_2(A) = \sum_{j=1}^3 a_{2,j}$, $s_3(A) = \sum_{j=1}^3 a_{3,j}$ (somme des coefficients des lignes)
- $s_4(A) = \sum_{i=1}^3 a_{i,1}$, $s_5(A) = \sum_{i=1}^3 a_{i,2}$, $s_6(A) = \sum_{i=1}^3 a_{i,3}$ (somme des coefficients des colonnes)
- $s_7(A) = \sum_{i=1}^3 a_{i,i}$, $s_8(A) = \sum_{i=1}^3 a_{i,4-i}$, (somme des coefficients des diagonales)

Pour tout couple $(k, l) \in \llbracket 1, 3 \rrbracket^2$, on note $E_{k,l}$ la matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont nuls excepté celui situé à l'intersection de la k -ième ligne et de la l -ième colonne qui vaut 1.

On rappelle que la famille $(E_{1,1}, E_{1,2}, E_{1,3}, E_{2,1}, E_{2,2}, E_{2,3}, E_{3,1}, E_{3,2}, E_{3,3})$ est une base de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. On note $\mathcal{B}$ cette base.

1. Soit $\mathcal{E}$ l'ensemble des matrices $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $s_7(A) = 0$.

- (a) Montrer que $\mathcal{E}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
- (b) Quelle est la dimension de $\mathcal{E}$?

Soit f l'application de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}^8$ qui à toute matrice A fait correspondre le vecteur

$$f(A) = (s_1(A), s_2(A), s_3(A), s_4(A), s_5(A), s_6(A), s_7(A), s_8(A))$$

2. (a) Montrer que f est une application linéaire.
- (b) On note $\mathcal{C}$ la base canonique de $\mathbb{R}^8$. Écrire la matrice F de f dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$.
3. On note $\mathcal{G}$ l'ensemble des matrices $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que :

$$s_1(A) = s_2(A) = s_3(A) = s_4(A) = s_5(A) = s_6(A) = s_7(A) = s_8(A).$$

- (a) Montrer que $\mathcal{G}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
- (b) On note $\text{Ker}(f)$ le noyau de l'application linéaire f . Montrer que $\mathcal{G} \cap \mathcal{E} = \text{Ker}(f)$.
- (c) On note J la matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1. Montrer que toute matrice de $\mathcal{G}$ s'écrit de manière unique comme la somme d'une matrice de $\text{Ker}(f)$ et d'une matrice de $\text{Vect}(J)$.
- (d) Quel est le rang de l'application f ?
- (e) Déterminer la dimension de $\text{Ker}(f)$ ainsi qu'une base de $\text{Ker}(f)$.

Exercice 2

Remarques et notations :

- La fonction de répartition de la loi normale centrée réduite est notée Φ .
- La notation $\exp$ désigne la fonction exponentielle.

- Les trois parties du problème sont très largement indépendantes.

Partie I. Un équivalent d'une intégrale

1. Soit N la fonction définie sur l'intervalle $[0, 1[$, à valeurs réelles, telle que :

$$N(x) = x^2 - 2x - 2(1-x)\ln(1-x).$$

- Montrer que la fonction N est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1[$.
- Montrer que pour tout $x \in [0, 1[$, on a : $\ln(1-x) \leq -x$.
- On note N' la fonction dérivée de la fonction N .
Montrer que pour tout $x \in [0, 1[$, on a $N'(x) \leq 0$.
- En déduire pour tout $x \in [0, 1[$, un encadrement de $N(x)$.

2. Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0, 1[$, à valeurs réelles, telle que :

$$f(x) = -2 \frac{x + \ln(1-x)}{x^2}$$

- Rappeler le développement limité en 0 à l'ordre 2 de $\ln(1-x)$.
- Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$. En déduire que la fonction f est prolongeable par continuité en 0.
On note encore f la fonction ainsi prolongée.
- Sous réserve d'existence, on note f' la fonction dérivée de f .
Montrer que pour tout $x \in]0, 1[$, on a : $f'(x) = -2 \frac{N(x)}{x^3(1-x)}$.
- Dresser le tableau de variation de la fonction f sur $[0, 1[$.
En déduire que f réalise une bijection strictement croissante de $[0, 1[$ dans $[1, +\infty[$.

3. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in [0, 1[$:

$$g_n(x) = \exp\left(-\frac{nx^2}{2}f(x)\right).$$

- Établir la convergence de l'intégrale $\int_0^1 g_n(x) dx$.
On pose alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $I_n = \int_0^1 g_n(x) dx$.
- Montrer que pour tout $x \in [0, 1[$, on a : $0 \leq g_n(x) \leq \exp\left(-\frac{nx^2}{2}\right)$.
- En déduire l'encadrement : $0 \leq I_n \leq \sqrt{\frac{2\pi}{n}} \left(\Phi(\sqrt{n}) - \frac{1}{2}\right)$.
- Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $0 \leq I_n \leq \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$.

4. Soit $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite réelle définie, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, par : $v_n = \frac{1}{\ln(n+2)}$

- Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $0 < v_n < 1$.
- On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $w_n = f(v_n)$.
Établir la convergence de la suite $(w_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et déterminer sa limite.
- Établir pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ les inégalités suivantes :

$$I_n \geq \int_0^{v_n} g_n(x) dx \geq \int_0^{v_n} \exp\left(-\frac{nx^2}{2}w_n\right) dx \geq \frac{1}{\sqrt{nw_n}} \int_0^{v_n \sqrt{nw_n}} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) du$$

- (d) Établir pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ l'encadrement :

$$\frac{2}{\sqrt{w_n}} \left(\Phi(v_n \sqrt{nw_n}) - \frac{1}{2} \right) \leq I_n \sqrt{\frac{2n}{\pi}} \leq 1.$$

- (e) En déduire un équivalent de I_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Partie II. Quelques propriétés asymptotiques de la loi de Poisson

Les notations sont identiques à celles de la Partie I.

5. On pose pour tout réel $x > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$J_0(x) = 1 - e^{-x} \quad \text{et} \quad J_n(x) = \frac{1}{n!} \int_0^x t^n e^{-t} dt.$$

- (a) Calculer pour tout réel $x > 0$, $J_1(x)$.
 (b) Établir pour tout réel $x > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la relation :

$$J_n(x) = J_{n-1}(x) - \frac{1}{n!} x^n e^{-x}.$$

- (c) En déduire pour tout réel $x > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, une expression de $J_n(x)$ sous forme de somme.
 (d) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt$ est convergente et calculer sa valeur.
 (e) A l'aide du changement de variable $t = n(1 - x)$, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$I_n = n! \frac{e^n}{n^{n+1}} J_n(n)$$

Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, de même loi de Poisson de paramètre 1. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$.

6. (a) Rappeler, sans démonstration mais en citant le résultat de cours utilisé, la loi de la variable aléatoire S_n .
 (b) Exprimer pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P(S_n \leq n)$ et $P(S_n \geq n)$ en fonction de $J_n(n)$ et $J_{n-1}(n)$ respectivement.
7. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note h_n la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ à valeurs réelles par : $h_n(x) = x^n e^{-x}$.
 (a) Étudier les variations de h_n sur $\mathbb{R}_+$.
 (b) Établir pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la relation :

$$P(S_{n+1} \leq n+1) - P(S_n \leq n) = -\frac{1}{(n+1)!} \int_n^{n+1} (h_{n+1}(t) - h_{n+1}(n)) dt.$$

- (c) En déduire que la suite $(P(S_n \leq n))_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante.
 (d) Étudier la monotonie de la suite $(P(S_n \geq n))_{n \in \mathbb{N}^*}$.
 (e) Montrer que les deux suites $(P(S_n \leq n))_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(P(S_n \geq n))_{n \in \mathbb{N}^*}$ sont convergentes.
8. (a) Énoncer le théorème de la limite centrée et déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(S_n \leq n)$.
 (b) En déduire, à l'aide des questions 4 et 5, un équivalent de $n!$ lorsque n tend vers $+\infty$

- (c) Donner un équivalent et la limite de $P(S_n = n)$ lorsque n tend vers $+\infty$.
- (d) Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(S_n \geq n)$.

Partie III. Médianes : cas des variables aléatoires discrètes et des variables aléatoires à densité

Soit X une variable aléatoire réelle définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, de fonction de répartition F . On appelle médiane de X , tout réel m vérifiant les deux conditions :

$$P(X \leq m) \geq \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad P(X \geq m) \geq \frac{1}{2}.$$

On admet qu'un tel réel m existe toujours.

9. Soit un entier N supérieur ou égal à 1 et X une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\llbracket 1, N \rrbracket$. On suppose que la loi de X est stockée dans une variable `loi` sous la forme d'un tableau `numpy`. Écrire une fonction `Python` d'en-tête `def mediane(lois)` qui renvoie une médiane de X .
10. Dans cette question, X est une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{N}$ admettant une espérance $E(X)$.

- (a) Montrer que pour tout $r \in \mathbb{N}^*$, on a : $E(|X - r|) = E(X) - r + 2 \sum_{k=0}^{r-1} (r - k) P(X = k)$.

- (b) Montrer que : $\sum_{k=0}^{r-1} F(k) = \sum_{k=0}^{r-1} (r - k) P(X = k)$.

En déduire que pour tout $r \in \mathbb{N}^*$, on a : $E(|X - r|) = E(X) + 2 \sum_{k=0}^{r-1} \left(F(k) - \frac{1}{2} \right)$

- (c) Soit m une médiane de X . On suppose que $m \in \mathbb{N}^*$. Déterminer, pour tout $r \in \mathbb{N}^*$, le signe de $E(|X - r|) - E(|X - m|)$. Conclure.
- (d) On suppose que X suit la loi de Poisson de paramètre n ($n \in \mathbb{N}^*$). En utilisant les questions 7 et 8, justifier que n est une médiane de X .

En utilisant les questions 10a et 8c, montrer que $E(|X - n|)$ est équivalent à $\sqrt{\frac{2n}{\pi}}$ quand n tend vers $+\infty$.

11. Dans cette question, X est une variable aléatoire à densité dont une densité f est continue sur $\mathbb{R}$. On suppose que X admet une espérance $E(X)$. Soit M la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$M(x) = E(|X - x|).$$

- (a) Établir pour tout $x \geq 0$ l'encadrement $0 \leq x(1 - F(x)) \leq \int_x^{+\infty} t f(t) dt$.

En déduire que $\lim_{x \rightarrow +\infty} x(1 - F(x)) = 0$.

En considérant la variable aléatoire $-X$, montrer que $\lim_{x \rightarrow -\infty} xF(x) = 0$.

- (b) Établir pour tout x réel, la relation : $M(x) = \int_{-\infty}^x F(t) dt + \int_x^{+\infty} (1 - F(t)) dt$

- (c) Montrer que pour tout couple $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, on a : $M(b) - M(a) = \int_a^b (2F(t) - 1) dt$.

- (d) On note m une médiane de X . Montrer que m est un point en lequel la fonction M atteint son minimum.