DS 5

Devoir surveillé du Samedi 30 Novembre

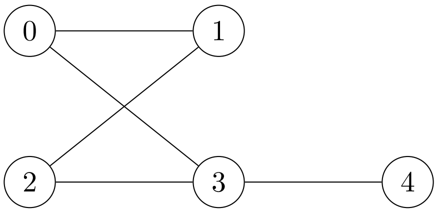
La calculatrice est interdite. Durée : 4h

Dans tout ce devoir, on suppose avoir importé sur `Python` les bibliothèques :

- `numpy` avec le raccourci `np` ;
- `numpy.linalg` avec le raccourci `al` ;
- `numpy.random` avec le raccourci `rd` ;
- `matplotlib.pyplot` avec le raccourci `plt`.

Exercice 1

On considère le graphe G suivant et on note A la matrice d'adjacence de G.



1. Déterminer la matrice A en expliquant sa construction.
2. (a) Par lecture du graphe, donner (en listant leurs sommets) les chaînes de longueur 3 reliant les sommets 2 et 3. Combien y en a-t-il ?

   (b) On considère la fonction `Python` suivante :

```python
def f(M,k):
    N = al.matrix_power(M,k)
    return N
```

   On suppose que l'on a saisi la matrice A et on considère les instructions :

```python
B = f(A,...)
n = B[...]
print(n)
```

   Compléter ces instructions pour qu'elles permettent l'affichage du nombre trouvé à la question 2.(a).

On note D la matrice diagonale, appelée matrice des degrés de G, dont l'élément diagonal situé à la ligne i et à la colonne i est le degré du sommet numéro i (ceci étant valable pour tout $i \in [\![1,5]\!]$).
On définit également la matrice L, appelée matrice laplacienne de G, en posant $L = D - A$.
On note λ_1, λ_2, λ_3, λ_4, λ_5 les valeurs propres non nécessairement distinctes de L et on suppose que $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \lambda_4 \leq \lambda_5$.

3. (a) Déterminer la matrice D.

   (b) Vérifier que l'on a $L = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

(c) Pourquoi la matrice L est-elle diagonalisable ?

4. On se propose dans cette question de montrer que les valeurs propres de L sont positives ou nulles et que $\lambda_1 = 0$.

Soit $X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{pmatrix}$ et $U = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

(a) On identifie une matrice de $\mathscr{M}_1(\mathbb{R})$ à un réel.
Exprimer ${}^tXLX$ en fonction de a, b, c, d et e puis monter que l'on a :

$${}^tXLX = (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-d)^2 + (d-a)^2 + (e-d)^2$$

(b) On suppose que X est un vecteur propre de L associé à une certaine valeur propre λ.
Déterminer LX puis ${}^tXLX$ en fonction de λ, a, b, c, d et e.
En déduire que les valeurs propres de L sont positives ou nulles.

(c) Déterminer LU et en déduire que $\lambda_1 = 0$.

5. (a) À l'aide de la question 3.(b), montrer l'équivalence :

$$LX = 0 \iff X \in \mathrm{Vect}(U).$$

(b) Conclure que λ_2, λ_3, λ_4, et λ_5 sont des réels strictement positifs.

Exercice 2

On désigne par n un entier ≥ 2.
On lance n fois une pièce équilibrée, les lancers étant supposés indépendants.
On note Z la variable aléatoire qui vaut 0 si l'on n'obtient aucun "Pile" pendant ces n lancers et qui, dans le cas contraire, prend pour valeur le rang du premier "Pile".

1. (a) Déterminer l'ensemble $Z(\Omega)$.

(b) Pour tout $k \in Z(\Omega)$, calculer $P(Z = k)$. On distinguera les cas $k = 0$ et $k \geq 1$.

(c) Vérifier que $\displaystyle\sum_{k \in Z(\Omega)} P(Z = k) = 1$.

(d) On rappelle qu'en Python, la fonction `rd.random()` permet de simuler la loi uniforme sur $]0, 1[$.
Recopier et compléter le programme Python suivant pour qu'il simule la variable aléatoire Z décrite ci-dessus, l'entier n étant entré par l'utilisateur.

```
def simulZ(n):
    k = 1
    while k <= n and ..... :
        k = .....
    if k == n+1 :
        z = .....
    else:
        z = .....
    return(z)
```

On dispose de $n+1$ urnes $U_0, U_1, \ldots, U_n$ telles que pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, l'urne U_k contient k boules blanches et $n-k$ boules noires.
On effectue des tirages d'une boule, au hasard et avec remise dans ces urnes de la façon suivante : si après les lancers de la pièce décrits dans le première question, la variable Z prend la valeur k (avec $k \geq 1$), alors on tire une par une et avec remise, k boules dans l'urne U_k et on note X la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches obtenues à l'issue de ces tirages. Si la variable Z a pris la valeur 0, aucun tirage n'est effectué et X prend la valeur 0.

2. Déterminer $X(\Omega)$
3. (a) Déterminer, en distinguant les cas $i=0$ et $1 \leq i \leq n$, la probabilité $P_{(Z=0)}(X=i)$.
   (b) Déterminer, en distinguant les cas $i=n$ et $0 \leq i \leq n-1$, la probabilité $P_{(Z=n)}(X=i)$.
   (c) Pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$, déterminer, en distinguant les cas $0 \leq i \leq k$ et $k < i \leq n$, la probabilité conditionnelle $P_{(Z=k)}(X=i)$.
4. (a) Montrer que $P(X=0) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{n-k}{2n}\right)^k + \frac{1}{2^n}$.
   (b) Montrer que $P(X=n) = \dfrac{1}{2^n}$.
   (c) Exprimer, pour tout $i \in [\![1, n-1]\!]$, $P(X=i)$ sous forme d'une somme que l'on ne cherchera pas à réduire.
5. Vérifier avec les expressions trouvées à la question précédente que $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} P(X=i) = 1$.

Exercice 3

Partie A : Étude d'une suite de fonctions

Pour tout entier $k \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction f_k définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_k(x) = (x+1)e^{kx}.$$

On note $\mathscr{C}_k$ la courbe de f_k dans le plan muni d'un repère orthonormé.

1. (a) Calculer les limites de la fonction f_k en $-\infty$ et en $+\infty$.
   (b) Dresser le tableau de variation de f_k en y faisant figurer les valeurs prises par f_k en -1 et en 0.
2. (a) Étudier la position relative des courbes $\mathscr{C}_k$ et $\mathscr{C}_{k+1}$. Vous préciserez leurs points d'intersection.
   (b) Dessiner sur un même graphique l'allure de $\mathscr{C}_k$ et $\mathscr{C}_{k+1}$.

Partie B : Étude d'une suite implicite

3. (a) Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, l'équation $f_k(x) = k$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}$ notée u_k.
   (b) Déterminer explicitement u_1.
4. Montrer que, pour tout entier $k \geq 1$, on a :

$$0 \leq u_k \leq \frac{\ln(k)}{k}.$$

En déduire que la suite (u_k) converge et donner sa limite.

5. (a) Soit $k \geq 1$ un entier. Montrer que :
$$u_k = \frac{\ln(k)}{k} - \frac{\ln(u_k + 1)}{k}.$$
   (b) En déduire que $u_k \sim \dfrac{\ln(k)}{k}$ lorsque k tend vers $+\infty$.

6. Quelle est la nature de la série $\sum\limits_{k \geq 1} u_k$?

Exercice 4

Dans ce problème, on identifie une matrice de $\mathscr{M}_1(\mathbb{R})$ à un réel.

On considère deux urnes A et B contenant initialement une boule blanche et une boule noire chacune. On procède à une suite d'épreuves, chaque épreuve consistant à tirer au hasard une boule dans chaque urne, la boule tirée de A étant remise dans B et la boule tirée de B étant remise dans A.

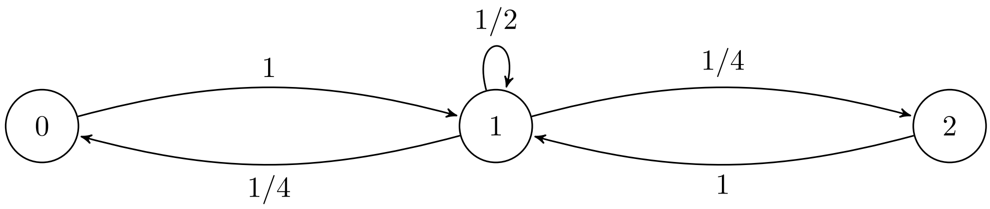
Pour tout entier naturel n, on note X_n la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches présentes dans A avant la $(n+1)^{\text{e}}$ épreuve.

On pose : $a_n = P\left(X_n = 0\right),\ b_n = P\left(X_n = 1\right),\ c_n = P\left(X_n = 2\right)$ et $U_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n & c_n \end{pmatrix}$.

1. (a) Donner les valeurs de a_0, b_0 et c_0.
   (b) Déterminer la loi de X_1 et en déduire les valeurs de a_1, b_1 et c_1.
   (c) Justifier rapidement que, pour tout entier naturel $n \geq 1$, $\left(\left(X_n = 0\right), \left(X_n = 1\right), \left(X_n = 2\right)\right)$ est un système complet d'événements.
   (d) En déduire, pour tout entier naturel n, la valeur de la somme $a_n + b_n + c_n$.

On admet dans la suite que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, les probabilités a_n, b_n et c_n sont non nulles.

2. Soit n un entier naturel non nul.
   (a) Déterminer, en les justifiant, les probabilités conditionnelles $P_{(X_n = i)}\left(X_{n+1} = j\right)$, pour tout $(i, j) \in [\![0, 2]\!]^2$, puis en déduire que le graphe suivant représente la chaîne de Markov décrite ci-dessus.



   (b) Écrire la matrice de transition $M = \left(m_{i,j}\right)_{(i,j) \in [\![0,2]\!]^2}$, où $m_{i,j} = P_{(X_n = i)}\left(X_{n+1} = j\right)$, associée à cette chaîne de Markov. On remarquera que la première ligne et la première colonne de cette matrice sont numérotées 0, la deuxième ligne et la deuxième colonne sont numérotées 1 et la troisième ligne et la troisième colonne sont numérotées 2. On vérifiera avant de poursuivre que la somme des éléments de chaque ligne de M est égale à 1.
   (c) Utiliser la formule des probabilités totales pour exprimer a_{n+1}, b_{n+1} et c_{n+1} en fonction de a_n, b_n et c_n.

3. Vérifier que les relations trouvées à la question 2.(c) restent valables pour $n = 0$.

4. (a) Pour tout n de $\mathbb{N}$, exprimer $E\left(X_{n+1}\right)$ en fonction de b_{n+1} et c_{n+1}.
   (b) En déduire que, pour tout n de $\mathbb{N}$, on a $E\left(X_{n+1}\right) = 1$.

(c) Établir finalement la relation :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad b_n + 2c_n = 1.$$

5. On pose $V = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et on considère, pour tout entier naturel n, la matrice-ligne

$$U_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n & c_n \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{1,3}(\mathbb{R}).$$

(a) Montrer que la suite $(U_n V)_{n\in\mathbb{V}}$ est une suite géométrique et donner sa raison.

(b) Pour tout entier naturel n, en déduire explicitement $2a_n - b_n + 2c_n$ en fonction de n.

6. Déterminer, pour tout entier naturel n, a_n, b_n et c_n puis donner la loi de X_n.

7. Montrer que la suite des variables $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers une variable X dont on déterminera la loi.

8. On se propose de retrouver la loi de X_n par une autre méthode.

(a) Calculer M^2 et M^3, puis vérifier que $2M^3 = M^2 + M$.

(b) En déduire les valeurs propres de M et donner une base de chacun de ses sous-espaces propres.

(c) On pose $P = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Justifier sans calcul que P est inversible.

(d) On pose $D = \begin{pmatrix} -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer MP et PD, puis conclure que M est diagonalisable.

(e) Établir la relation suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad U_{n+1} = U_n M.$$

(f) En déduire la relation, valable pour tout entier naturel n :

$$U_n = U_0 M^n.$$

(g) Donner, sans faire les calculs, une stratégie pour obtenir la loi de X_n à partir de cette dernière relation (on précisera les différentes étapes permettant de conclure).
