

— DS 7 (B) —

Devoir surveillé du Samedi 18 Janvier

La calculatrice est interdite. Durée : 4h

Exercice 1

I désigne la matrice unité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et M une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ pour laquelle il existe un entier p supérieur ou égal à 2 tel que $M^p = 0$ et $M^{p-1} \neq 0$. On définit alors les matrices suivantes :

- $\exp(M) = \sum_{k=0}^{p-1} \frac{1}{k!} M^k$, avec la convention $M^0 = I$,
- $\ln(I + M) = \sum_{k=1}^{p-1} \frac{(-1)^{k+1}}{k} M^k$.

On considère l'ensemble E des matrices triangulaires supérieures de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ dont tous les éléments diagonaux sont nuls.

1. (a) Montrer que E est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et donner sa dimension.
 (b) Montrer que les matrices de E ne sont pas inversibles.
 (c) Montrer que toute matrice non nulle de E n'est pas diagonalisable.

Dans toute la suite, A désigne une matrice quelconque de E .

2. (a) Calculer A^k pour tout $k \in \mathbb{N}$.
 (b) Exprimer $\exp(A)$ et $\ln(I + A)$ en fonction de I et de A .
3. Montrer que : $\ln(\exp(A)) = A$.
4. (a) Vérifier que $\ln(I + A)$ appartient à E .
 (b) Montrer que : $\exp(\ln(I + A)) = I + A$.
5. Montrer que : $\forall m \in \mathbb{N}^*, \exp(mA) = (\exp(A))^m$.
6. Montrer que $\exp(A)$ est inversible et que son inverse est : $(\exp(A))^{-1} = \exp(-A)$.
7. Déterminer une condition sur les matrices A et B de E pour que :

$$\exp(A + B) = \exp(A) \times \exp(B).$$

Exercice 2

Soit n un entier naturel non nul et p un réel de $]0; 1[$. On pose $q = 1 - p$.

On dispose de deux urnes, l'urne U qui contient n boules numérotées de 1 à n et l'urne V qui contient des boules blanches en proportion p .

On pioche une boule au hasard dans U et on note X la variable aléatoire égale au numéro de la boule tirée.

Si X prend la valeur k , on pioche k boules dans V , une par une, avec remise à chaque fois de la boule tirée, et on appelle Y la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches obtenues.

1. Dans le cas où $n = 1$, reconnaître la loi de Y .

On revient au cas général.

2. Reconnaître la loi de X et donner son espérance et sa variance.

3. Soit k un élément de $\llbracket 1, n \rrbracket$. Reconnaître la loi de Y , conditionnellement à l'événement $(X = k)$, et en déduire, en distinguant les cas $0 \leq i \leq k$ et $k < i$, la probabilité $P_{(X=k)}(Y = i)$.
4. On rappelle les commandes **Python** suivantes qui permettent de simuler des variables usuelles discrètes :
 - `rd.randint(a, b+1)` simule une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $\llbracket a, b \rrbracket$,
 - `rd.binomial(n, p)` simule une variable aléatoire suivant la loi binomiale de paramètres n et p ,
 - `rd.geometric(p)` simule une variable aléatoire suivant la loi géométrique de paramètre p ,
 - `rd.poisson(a)` simule une variable aléatoire suivant la loi de Poisson de paramètre a .

Compléter le script **Python** suivant afin qu'il permette de simuler les variables X et Y .

```

1 | n = int(input('entrez la valeur de n :'))
2 | p = int(input('entrez la valeur de p :'))
3 | X = .....
4 | Y = .....
```

5. (a) Justifier que l'ensemble $Y(\Omega)$ des valeurs prises par Y est égal à $\llbracket 0, n \rrbracket$, puis montrer que :

$$P(Y = 0) = \frac{q(1 - q^n)}{n(1 - q)}.$$

- (b) Écrire, pour tout i de $\llbracket 1, n \rrbracket$, la probabilité $P(Y = i)$ sous forme d'une somme de $n - i + 1$ termes que l'on ne cherchera pas à simplifier.

6. (a) Soit i et k deux entiers tels que $1 \leq i \leq k \leq n$. Montrer l'égalité : $i \binom{k}{i} = k \binom{k-1}{i-1}$.

- (b) Établir ensuite que Y possède une espérance et que celle-ci est donnée par :

$$E(Y) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left(k \sum_{i=1}^k \binom{k-1}{i-1} p^i q^{k-i} \right).$$

- (c) En déduire que $E(Y) = \frac{(n+1)p}{2}$.

7. (a) Établir que : $\forall n \geq 2, \quad E(Y(Y-1)) = \frac{1}{n} \sum_{k=2}^n \left(k(k-1) \sum_{i=2}^k \binom{k-2}{i-2} p^i q^{k-i} \right).$

- (b) Montrer que l'on a : $\forall n \geq 2, \quad E(Y(Y-1)) = \frac{(n^2 - 1)p^2}{3}.$

- (c) Vérifier que cette expression reste valable pour $n = 1$.

- (d) Exprimer, sans chercher à la calculer, la variance de Y en fonction de $E(Y(Y-1))$ et $E(Y)$.

Exercice 3

1. Déterminer l'ensemble $\mathcal{D}$ des réels tels que $e^x - e^{-x} > 0$.

On définit la fonction f par :

$$\forall x \in \mathcal{D}, \quad f(x) = \ln(e^x - e^{-x}).$$

On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

2. (a) Étudier les variations de f et donner les limites de f aux bornes de $\mathcal{D}$.

- (b) En déduire l'existence d'un unique réel α vérifiant $f(\alpha) = 0$, puis donner la valeur exacte de α .
- (c) Montrer que le coefficient directeur de la tangente T à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse α vaut $\sqrt{5}$.
3. (a) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x)$.
- (b) En déduire l'équation de l'asymptote Δ à la courbe $\mathcal{C}$ au voisinage de $+\infty$.
- (c) Donner la position relative de Δ et $\mathcal{C}$.
4. Donner l'allure de la courbe $\mathcal{C}$ en faisant figurer les droites Δ et T .
- On admettra que $\alpha \simeq 0,5$ et que $\sqrt{\alpha} \simeq 2,2$.
5. Soit λ un réel, on note g_λ la fonction définie par :

$$g_\lambda(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < \alpha \\ \frac{\lambda}{e^{2x} - 1} & \text{si } x \geq \alpha. \end{cases}$$

- (a) On pose $h(x) = f(x) - x$. Après avoir calculer $h'(x)$, déterminer λ en fonction de α pour que g_λ soit une densité de probabilité d'une certaine variable aléatoire X .
- (b) Donner la fonction de répartition G_λ de X .

Exercice 4

On considère la fonction f qui à tout réel x associe : $f(x) = \int_0^x \ln(1+t^2) dt$.

Les deux parties de ce problème peuvent être traitées indépendamment l'une de l'autre.

Partie 1 : Étude de f

- (a) Déterminer le signe de $f(x)$ selon le signe de x .
 - (b) Justifier que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et calculer $f'(x)$ pour tout réel x .
 - (c) En déduire les variations de f sur $\mathbb{R}$ (on ne cherchera pas à calculer les limites de f).
- (a) Montrer que f est impaire.
 - (b) Étudier la convexité de f et donner les coordonnées des éventuels points d'inflexion de la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.
- (a) Déterminer les réels a et b tels que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \frac{t^2}{1+t^2} = a + \frac{b}{1+t^2}$$

- (b) En déduire, grâce à une intégration par parties, que, pour tout réel x , on a :

$$f(x) = x(\ln(1+x^2) - 2) + 2 \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt$$

- Recherche d'un équivalent de $f(x)$ au voisinage de $+\infty$.
 - Montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2} dt$ est une intégrale convergente.
 - En déduire que $f(x) \underset{+\infty}{\sim} x \ln(1+x^2)$.

- (c) Vérifier que, pour tout réel x strictement positif, on a : $\ln(1+x^2) = 2\ln(x) + \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)$, puis établir l'équivalent suivant :

$$f(x) \underset{+\infty}{\sim} 2x \ln(x)$$

- (d) Donner sans calcul un équivalent de $f(x)$ lorsque x est au voisinage de $-\infty$.

5. Recherche d'un équivalent de $f(x)$ au voisinage de 0.

- (a) Montrer que f est de classe C^3 sur $\mathbb{R}$.

On admet la formule de Taylor-Young à l'ordre 3 au voisinage de 0 pour la fonction f , c'est à dire :

$$f(x) = f(0) + \frac{x^1}{1!}f'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \frac{x^3}{3!}f^{(3)}(0) + o(x^3).$$

- (b) Déterminer $f(0)$, $f'(0)$, $f''(0)$ et $f^{(3)}(0)$.
 (c) En déduire alors un équivalent de $f(x)$ au voisinage de 0.

Partie 2 : Étude d'une suite

On pose $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n non nul, $u_n = \int_0^1 (\ln(1+t^2))^n dt$.

6. (a) La valeur donnée à u_0 est-elle cohérente avec l'expression générale de u_n ?
 (b) Exprimer u_1 à l'aide de la fonction f .
 7. (a) Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.
 (b) Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est minorée par 0. En déduire qu'elle converge.
 8. (a) Établir l'encadrement suivant :

$$0 \leq u_n \leq (\ln 2)^n.$$

- (b) Que peut-on en déduire sur la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$? Sur la série de terme général u_n ?
 9. (a) Montrer que :

$$0 \leq \int_0^1 \frac{(\ln(1+t^2))^n}{1 - \ln(1+t^2)} dt \leq \frac{u_n}{1 - \ln 2}.$$

- (b) En déduire la valeur de $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{(\ln(1+t^2))^n}{1 - \ln(1+t^2)} dt$.
 (c) Justifier que, pour tout entier naturel n non nul, on a :

$$\sum_{k=0}^{n-1} u_k = \int_0^1 \frac{1 - (\ln(1+t^2))^n}{1 - \ln(1+t^2)} dt.$$

- (d) En déduire que l'on a :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} u_k = \int_0^1 \frac{1}{1 - \ln(1+t^2)} dt.$$