DS 8 (A)

Devoir surveillé du Lundi 24 Février

La calculatrice est interdite. Durée : 4h

Exercice 1

E désigne l'espace des fonctions polynômes à coefficients réels, dont le degré est inférieur ou égal à l'entier naturel 2.

Partie I : Étude d'un endomorphisme de E.

On considère l'application f qui, à tout élément P de E associe la fonction polynôme Q telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad Q(x) = (x-1)P'(x) + P(x),$$

et $\mathcal{B} = (P_0, P_1, P_2)$ la base canonique de E définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = x \quad \text{et} \quad P_2(x) = x^2.$$

1. Montrer que f est un endomorphisme de E.
2. Vérifier que la matrice A de f dans $\mathcal{B}$, s'écrit sous la forme :
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$
3. f est-il un automorphisme de E ?
4. Déterminer l'image par f des fonctions polynômes R_0, R_1, R_2 définies par :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad R_0(x) = 1, \quad R_1(x) = x - 1 \quad \text{et} \quad R_2(x) = (x-1)^2.$$
5. Montrer que $\mathcal{B}' = (R_0, R_1, R_2)$ est une base de E.
6. Écrire la matrice de passage P de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$ ainsi que la matrice D de f dans la base $\mathcal{B}'$.
7. Vérifier que pour tout réel x,
$$\begin{cases} R_2(x) + 2R_1(x) + R_0(x) = P_2(x) \\ R_1(x) + R_0(x) = P_1(x) \end{cases}$$
En déduire la matrice de passage de la base $\mathcal{B}'$ à la base $\mathcal{B}$.
8. Écrire A^{-1} en fonction de D^{-1} puis démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n,
$$\left[A^{-1}\right]^n = P\left[D^{-1}\right]^n P^{-1}$$
et expliciter enfin la matrice $\left[A^{-1}\right]^n$.

Partie II : Une chaîne de Markov.

On dispose d'une urne qui contient trois boules numérotées de 0 à 2. On s'intéresse à une suite d'épreuves définies de la manière suivante :

- La première épreuve consiste à choisir au hasard une boule dans cette urne.

- Si j est le numéro de la boule tirée, on enlève de l'urne toutes les boules dont le numéro est strictement supérieur à j, le tirage suivant se faisant alors dans l'urne ne contenant plus que les boules numérotées de 0 à j.

On considère alors la variable aléatoire réelle X_k égale au numéro de la boule obtenue à la k-ième épreuve ($k \geq 1$). On note alors U_k la matrice ligne définie par :

$$U_k = \begin{pmatrix} P(X_k = 0) & P(X_k = 1) & P(X_k = 2) \end{pmatrix}$$

où $P(X_k = j)$ est la probabilité de tirer la boule numéro j à la k-ième épreuve. On convient que X_0 suit la loi certaine égale à 2 et on a donc :

$$U_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

9. Tracer le graphe probabiliste associé à la chaîne de Markov $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$. Donner la matrice de transition B associée et exprimer B à l'aide de A^{-1}.

10. Reconnaître la loi de X_1. Donner son espérance et sa variance.

11. Déterminer la loi de X_2. Calculer son espérance et sa variance.

12. Prouver que : $\forall k \in \mathbb{N}, \quad U_{k+1} = U_k B$.

13. En déduire une expression de U_k en fonction de U_0, B et k.

14. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, donner la loi de X_k et vérifier que l'on a :

$$\lim_{k\to+\infty} P(X_k = 0) = 1, \quad \lim_{k\to+\infty} P(X_k = 1) = 0, \quad \lim_{k\to+\infty} P(X_k = 2) = 0.$$

15. On rappelle que la commande `rd.randint(a, b+1)` retourne un nombre choisi aléatoirement suivant la loi uniforme $\mathcal{U}(\llbracket a, b \rrbracket)$.

    Compléter le programme `Python` suivant pour qu'il simule k étapes de l'expérience décrite dans l'énoncé et retourne la valeur de X_k :

```
def simulX(k):
    X = 2
    for i in range(k):
        X = .....
    return(X)
```

16. On considère les instructions suivantes :

```
S = []
for i in range(10000):
    S.append(simulX(100))
L = [S.count(j)/10000 for j in range(3)]
print(L)
```

    Que contient la variable `S` à l'issue des 10000 passages dans la boucle `for` ? Que contient la variable `L` ? Quel résultat peut-on s'attendre à avoir ?

Exercice 2

On considère, pour tout entier naturel n, l'application φ_n définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi_n(x) = (1-x)^n e^{-2x},$$

ainsi que l'intégrale :

$$I_n = \int_0^1 \varphi_n(x)\, dx.$$

On se propose de démontrer l'existence de trois réels a, b, c tels que :

$$I_n = a + \frac{b}{n} + \frac{c}{n^2} + \frac{1}{n^2}\varepsilon(n) \quad \text{avec} \quad \lim_{n\to+\infty} \varepsilon(n) = 0.$$

1. Calculer I_0 et I_1.
2. Étudier la monotonie de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
3. Déterminer le signe de I_n pour tout entier naturel n.
4. Qu'en déduit-on pour la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$?
5. Majorer la fonction $g : x \to e^{-2x}$ sur $[0, 1]$.
6. En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq I_n \leq \dfrac{1}{n+1}$.
7. Déterminer la limite de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lorsque n tend vers l'infini.
8. A l'aide d'une intégration par parties, montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad 2I_{n+1} = 1 - (n+1)\, I_n$.
9. En déduire la limite de la suite $(n\, I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lorsque n tend vers l'infini.
10. Déterminer la limite de la suite $(n\,(n\, I_n - 1))_{n\in\mathbb{N}}$ lorsque n tend vers l'infini.
11. Donner alors les valeurs de a, b, c.

Exercice 3

On suppose que toutes les variables aléatoires présentées dans cet exercice sont définies sur le même espace probabilisé.

Partie A

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{t^3} & \text{si } t \geq 1, \\ 0 & \text{si } -1 < t < 1, \\ -\dfrac{1}{t^3} & \text{si } t \leq -1. \end{cases}$$

1. Démontrer que la fonction f est paire.
2. Justifier que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)\, dt$ converge et calculer sa valeur.
3. (a) À l'aide d'un changement de variable, montrer que pour tout réel A strictement supérieur à 1, on a :
$$\int_{-A}^{-1} f(t)\, dt = \int_1^A f(u)\, du.$$
En déduire que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{-1} f(t)\, dt$ converge et donner sa valeur.

   (b) Montrer que la fonction f est une densité de probabilité.
4. On considère une variable aléatoire X admettant f pour densité. On note F_X la fonction de répartition de X.

(a) Montrer que, pour tout réel x, on a :

$$F_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2x^2} & \text{si } x \leq -1, \\ \dfrac{1}{2} & \text{si } -1 < x < 1, \\ 1 - \dfrac{1}{2x^2} & \text{si } x \geq 1. \end{cases}$$

(b) Démontrer que X admet une espérance, puis que cette espérance est nulle.

(c) La variable aléatoire X admet-elle une variance ?

5. Soit Y la variable aléatoire définie par $Y = |X|$.

(a) Donner la fonction de répartition de Y, puis montrer que Y est une variable aléatoire à densité.

(b) Montrer que Y admet pour densité la fonction f_Y définie par :

$$f_Y(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{x^3} & \text{si } x \geq 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

(c) Montrer que Y admet une espérance et la calculer.

Partie B

6. Soit D une variable aléatoire prenant les valeurs -1 et 1 avec équiprobabilité, indépendante de la variable aléatoire Y. Soit T la variable aléatoire définie par $T = DY$.

(a) Déterminer la loi de la variable $Z = \dfrac{D+1}{2}$. En déduire l'espérance et la variance de D.

(b) Justifier que T admet une espérance et préciser sa valeur.

(c) Montrer que pour tout réel x, on a :

$$P(T \leq x) = \frac{1}{2}\, P(Y \leq x) + \frac{1}{2}\, P(Y \geq -x).$$

(d) En déduire la fonction de répartition de T.

7. Soit U une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $]0,1[$ et V la variable aléatoire définie par :

$$V = \frac{1}{\sqrt{1-U}}.$$

(a) Rappeler la fonction de répartition de U.

(b) Déterminer la fonction de répartition de V et vérifier que les variables V et Y suivent la même loi.

8. (a) Écrire une fonction en langage `Python`, d'en-tête `def D(n)`, qui prend un entier $n \geq 1$ en entrée, et renvoie une matrice ligne contenant n réalisations de la variable aléatoire D.

(b) On considère le script suivant :

```
1 n = input(`entrer n `)
2 a = D(n)
3 b = rd.random(n)
4 c = a/np.sqrt(1-b)
5 print(np.sum(c)/n)
```

De quelle variable aléatoire les coefficients du vecteur `c` sont-ils une simulation ? Pour `n` assez grand, quelle sera la valeur affichée ? Justifier votre réponse.