IE 16

Interrogation du Mercredi 26 Mars

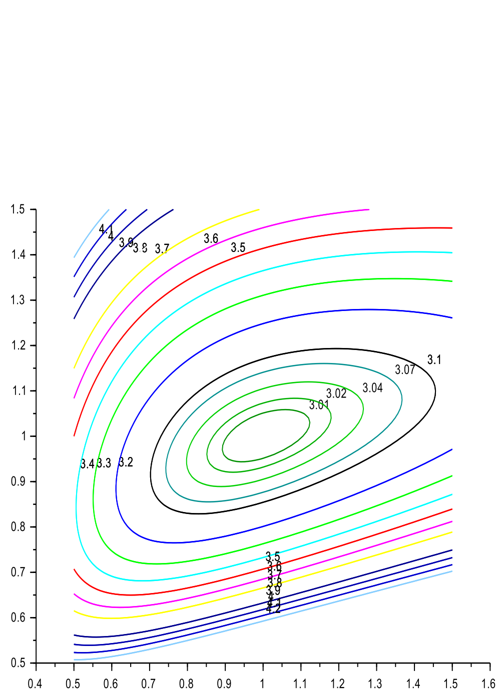
1. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^2$.
   - Donner la définition du gradient et de la matrice hessienne de f en un point (x_0, y_0).
   - Donner la définition d'un point critique (x_0, y_0) de f.
   - Donner le lien entre point critique de f et extremum local de f.
   - Soient λ_1 et λ_2 les valeurs propres de la matrice hessienne de f en un point critique (x_0, y_0). Que peut-on dire :
     - si $\lambda_1 > 0$ et $\lambda_2 < 0$?
     - si $\lambda_1 < 0$ et $\lambda_2 < 0$?
     - si $\lambda_1 > 0$ et $\lambda_2 > 0$?
     - si $\lambda_1 = 0$ ou $\lambda_2 = 0$?

2. On considère la fonction f de classe $\mathscr{C}^2$ définie sur l'ouvert de $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ par :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \qquad f(x,y) = \frac{x}{y^2} + y^2 + \frac{1}{x}.$$

   (a) On a tracé les lignes de niveau de la fonction f ci-contre.

   Établir une conjecture à partir du graphique quant à l'existence d'un extremum local pour f, dont on donnera la nature, la valeur approximative et les coordonnées du point en lequel il semble être atteint.



(b) Calculer les dérivées partielles premières de f, puis démontrer que f admet un unique point critique, noté A, que l'on déterminera.

(c) Calculer les dérivées partielles secondes de f, puis démontrer que la matrice hessienne de f au point A est la matrice H définie par : $H = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 8 \end{pmatrix}$.

(d) En déduire que la fonction f admet au point A un extremum local, préciser sa nature et donner sa valeur.