Révisions 10

Sujet ESSEC

ESSEC1 2021

Dans ce problème, on s'intéresse à un modèle, inspire du modèle de Cori, de propagation d'un virus au sein d'une population.
La partie 1 introduit des outils théoriques permettant de définir et d'étudier ce modèle.
Les parties 2 et 3 concernent cette étude. Si l'on fait abstraction des définitions, des notations et de la question 17, la partie 3 est indépendante des parties 1 et 2.

Partie 1 - Lois composées

On considère :

- un espace probabilisé $(\Omega, A, \mathbb{P})$ et J un sous-ensemble non vide de $\mathbb{R}^+$;
- une variable aléatoire Y sur cet espace à valeurs dans J.
- une famille $(X_t)_{t\in J}$ de variables aléatoires sur cet espace **à valeurs dans** $\mathbb{N}$ et **indépendantes de** Y telles que pour tout $t \in J$,
$$X_t \text{ suit la loi } \mu(t)$$
$\mu(t)$ désignant une loi de probabilité de paramètre t.

On définit la variable aléatoire Z sur cet espace par :

$$\forall \omega \in \Omega,\ \text{si } Y(\omega) = t \text{ alors } Z(\omega) = X_t(\omega)$$

et on dit que Z suit la loi $\mu(Y)$.
On considère dans cette partie une telle variable Z qui suit la loi $\mu(Y)$.
Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on définit aussi la fonction f_k de J dans $[0, 1]$ par :

$$f_k(t) = \mathbb{P}([X_t = k])$$

1. *Un exemple avec Scilab.* On considère le script Scilab suivant :

```
function r=X(t)
r=1
while rand ()>...
r=...
end
endfunction


Y=rand()
Z=...
disp(Z)
```

En considérant les notations précédentes avec $J =]0, 1[$ et en notant Y la variable aléatoire dont Y est une simulation, compléter le script précédent pour que Z soit une simulation d'une variable aléatoire qui suit la loi géometrique $\mathcal{G}(Y)$.

- *Cas où Y est discrète.* On suppose dans les questions 2 et 3 que Y est discrète.

2. (a) Soit $y \in Y(\Omega)$. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}([Z=k] \cap [Y=y]) = f_k(y)\mathbb{P}([Y=y])$$

et si $\mathbb{P}([Y=y]) \neq 0$,

$$\mathbb{P}_{[Y=y]}([Z=k]) = f_k(y)$$

(b) En déduire que :

$$\mathbb{P}([Z=k]) = E(f_k(Y)) \tag{1}$$

(c) *Un exemple où* $J = \mathbb{N}^*$. Soit $p \in]0,1[$. Si pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, X_n suit la loi uniforme sur $[\![1,n]\!]$ et si la loi de Y est définie par, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathbb{P}([Y=n]) = np^2(1-p)^{n-1}$$

montrer que Z suit la loi géométrique de paramètre p.

3. On suppose que pour tout $t \in J$, $E(X_t)$ existe. On note $g(t)$ cette espérance et on suppose que $E(g(Y))$ existe.

(a) Montrer que :

$$E(g(Y)) = \sum_{y \in Y(\Omega)} \left(\sum_{k=0}^{+\infty} k f_k(y) \mathbb{P}([Y=n]) \right)$$

(b) En admettant que l'on peut inverser l'ordre des sommes, montrer que $E(Z)$ existe et que :

$$E(Z) = E(g(Y)) \tag{2}$$

- *On admet que les resultats établis dans les questions 2 et 3, en particulier* (1) *et* (2), *sont encore vrais lorsque* Y *n'est plus discrète.*

4. *Un premier exemple.* On suppose que $J =]0,1[$, que la loi de X_t est la loi géométrique de paramètre t et que Y suit la loi uniforme sur $]0,1[$.

(a) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}([Z=k]) = \dfrac{1}{k(k+1)}$. La variable aléatoire Z admet-elle une espérance ?

(b) Que vaut $E(X_t)$ en fonction de t ? Si l'on note g cette fonction de t, que peut-on dire de $E(g(Y))$?

5. *Un deuxième exemple.* On suppose que $J = [0,+\infty[$, que la loi de X_t est la loi de Poisson de paramètre t et que Y suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.

Par suite, Z suit la loi $\mathcal{P}(Y)$.

Par convention, la loi de Poisson de paramètre 0 est la loi de la variable aléatoire nulle.

(a) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}([Z=k]) = \int_0^{+\infty} \frac{t^k}{k!} \lambda \mathrm{e}^{-(\lambda+1)t} dt = \frac{\lambda}{(\lambda+1)^{k+1}} \int_0^{+\infty} \frac{x^k}{k!} \mathrm{e}^{-x} dx$$

(b) En raisonnant par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$, justifier que pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^k}{k!} \mathrm{e}^{-x} dx = 1$$

(c) Déterminer la loi de Z. Reconnaître la loi de $Z+1$.

(d) En déduire $E(Z)$. Ce résultat est-il cohérent avec l'egalite (2) ?

Partie 2 - Le modèle de Cori

On considère une population d'effectif infini dans laquelle un individu donné est infecté le jour 0 par un virus contagieux.
Soit $d \in \mathbb{N}^*$. On suppose que :

- tout individu infecté par le virus est immédiatement contagieux et sa contagiosité ne dure que $(d+1)$ jours, du jour n où il est infecté jusqu'au jour $(n+d)$ $(n \in \mathbb{N})$;
- une fois infectés, les individus présentent un même profil de contagiosité donné par un $(d+1)$-uplet $(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_d)$ qui dépend généralement de facteurs biologiques.

Pour tout $k \in [\![0, d]\!]$, on dit que α_k est la contagiosité de tout individu ayant été infecté k jours plus tôt.
Autrement dit, on peut considérer que α_k, lié à la nature du virus, détermine la proportion d'individus contaminés par un individu infecté, parmi tous ceux avec lesquels il est en contact k jours après sa contamination.

Finalement, les réels $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_d$ sont tels que, pour tout $k \in [\![0, d]\!]$, $\alpha_k \in]0, 1[$ et on note $\alpha = \sum\limits_{k=0}^{d} \alpha_k$, ce qui signifie que α est la contagiosité globale d'un individu infecté sur toute la période où il est infecté.
On utilise les notations et définitions de la partie 1 avec $J = \mathbb{R}^+$.
On suppose que les variables aléatoires qui interviennent par la suite sont définies sur l'espace $(\Omega, A, \mathbb{P})$.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note R_n la variable aléatoire qui désigne le nombre moyen de contacts réalisés le jour n par un individu contagieux ce jour-là.

  On suppose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'existence de $E(R_n)$ et on pose $r_n = E(R_n)$.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note Z_n la variable aléatoire égale au nombre total d'individus qui sont infectés et donc deviennent contagieux le n-ième jour. Par exemple, $Z_0 = 1$.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note I_n la variable aléatoire égale à la contagiosité globale de la population le n-ième jour, définie par :
$$I_n = \sum_{k=0}^{\min(n,d)} \alpha_k Z_{n-k} \tag{*}$$
- On suppose enfin que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, I_n et R_n sont indépendantes et que si l'on pose $Y_n = R_n I_n$, on a :
$$Z_{n+1} \text{ suit la loi } \mathcal{P}(Y_n)$$
  où $\mathcal{P}$ désigne la loi de Poisson. Ainsi la loi de Z_{n+1} ne dépend que des lois de R_n et de I_n.

6. Donner une justification de $(*)$.
7. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $E(I_n)$ existe. Montrer que $E(Y_n)$ existe et en utilisant un résultat de la partie 1, montrer que $E(Z_{n+1})$ existe et vaut $r_n E(I_n)$.

   (b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $z_n = E(Z_n)$ existe et vérifie la relation de récurrence
$$z_{n+1} = r_n \sum_{k=0}^{\min(n,d)} \alpha_k z_{n-k} \tag{3}$$
8. *Programmation de z_n avec Scilab.*

   On suppose que la suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $r_n = \frac{n+2}{n+1}$.

   On note Δ la matrice ligne $(\alpha_0 \ldots \alpha_d)$.

   Ecrire une fonction Scilab d'entête `function r=z(Delta,n)` qui calcule z_n si `Delta` représente la matrice ligne Δ.

9. Soit $(U_n)_{n\geqslant 0}$, $(V_n)_{n\geqslant 0}$, deux suites d'événements tels que $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}(U_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}(V_n) = 1$.

   Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}(U_n \cap V_n) = 1$.

- On rappelle que l'on dit qu'un événement A est presque sûr lorsque $\mathbb{P}(A) = 1$.

10. On note pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $A_n = \bigcap\limits_{k=n}^{+\infty} [Z_k = 0]$ et B l'événement "la contamination s'éteint au bout d'un nombre fini de jours".

    (a) Montrer que $\mathbb{P}(B) = \lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}(A_n)$.

    (b) En distinguant les cas où $\mathbb{P}\left(\bigcap\limits_{k=n}^{n+d} [Z_k = 0]\right)$ est nulle ou pas, établir que, pour tout $p \geqslant d$,

    $$\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=n}^{n+p} [Z_k = 0]\right) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=n}^{n+d} [Z_k = 0]\right)$$

    puis que $\mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}\left(\bigcap\limits_{k=n}^{n+d} [Z_k = 0]\right)$.

    (c) En déduire que B est presque sûr si et seulement si $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}([Z_n = 0]) = 1$.

    (d) Montrer que cela équivaut aussi au fait que $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers 0.

11. (a) Montrer, en utilisant un résultat de la partie 1, que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

    $$\mathbb{P}([Z_{n+1} = 0]) = E\left(\mathrm{e}^{-Y_n}\right)$$

    (b) On suppose que $\lim\limits_{n\to+\infty} z_n = 0$. En déduire que B est presque sûr (on pourra montrer que pour tout x reel, $e^{-x} \geqslant 1 - x$).

Partie 3 - Limite du nombre moyen de contaminations journalières

Dans cette partie, on conserve les notations de la partie 2 et on s'intéresse au comportement asymptotique de la suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$, definie par la relation (3) et $z_0 = 1$, sous trois hypothèses différentes concernant la suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
Pour tout réel x, on identifie x et la matrice carrée d'ordre 1 dont l'unique coefficient est x.
Pour tout $k \in [\![0, d]\!]$, on pose $a_k = \frac{\alpha_k}{\alpha}$.

12. On suppose, dans cette question, qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ et $\rho \in]0, 1[$ tels que, pour tout $n \geqslant N$, $r_n\alpha \leqslant \rho$.

    On note (H_1) cette hypothese.

    (a) Que vaut $\lim\limits_{t\to 1} \sum\limits_{k=0}^{d} a_k t^{d-k}$?

    En déduire qu'il existe $\theta \in]0, 1[$ tel que $\theta^{d+1} \geqslant \rho \left(\sum\limits_{k=0}^{d} a_k \theta^{d-k}\right)$ (on pourra raisonner par l'absurde).

    - On pose $M = \max\limits_{k\in[\![N,N+d]\!]} \dfrac{z_k}{\theta^k}$.

    (b) Montrer que pour tout $n \geqslant N$, $z_n \leqslant M\theta^n$.

(c) En déduire que $\lim_{n\to+\infty} z_n = 0$.

On montrerait de même que s'il existe $N \in \mathbb{N}$ et $\rho > 1$ tels que, pour tout $n \geqslant N$, $r_n\alpha \geqslant \rho$, on a $\lim_{n\to+\infty} z_n = +\infty$. On note (H_2) cette hypothèse.

- On suppose, dans les questions 13 à 16 , que **la suite** $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **est constante de valeur** $\frac{1}{\alpha}$. On note (H_3) cette hypothèse.
  On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$,
  $$U_n = \begin{pmatrix} z_n \\ z_{n-1} \\ \vdots \\ z_{n-d} \end{pmatrix}$$
  avec $z_{-1} = \ldots = z_{-d} = 0$.

13. (a) Montrer quil existe une matrice A carrée d'ordre $d+1$, de première ligne $L = (a_0 \ldots a_d)$, telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} = AU_n$.
    (b) En déduire que, pour tout $n \geqslant 0$, $U_n = A^n U_0$ puis que $z_{n+1} = LA^n U_0$.

14. Dans cette question, $d = 2$ et $L = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$.
    (a) Montrer que $\mathrm{Sp}\,(A) = \left\{1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}\right\}$.
    (b) Déterminer une base (V_1, V_2, V_3) de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, où V_1 est un vecteur colonne propre de A pour la valeur propre 1, V_2 pour $-\frac{1}{2}$, V_3 pour $-\frac{1}{3}$, ces colonnes ayant leur premier coefficient égal a 1.
    (c) Déterminer $(s_1, s_2, s_3) \in \mathbb{R}^3$, tel que $U_0 = s_1V_1 + s_2V_2 + s_3V_3$.
    (d) En déduire que la suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers s_1.

15. On revient au cas général.
    (a) Montrer que $\lambda \in \mathrm{Sp}\,(A)$ si et seulement si $\lambda^{d+1} = \sum_{k=0}^{d} a_{d-k}\lambda^k$ et que les sous-espaces propres de A sont de dimension 1.
    (b) Montrer que 1 est valeur propre de A et déterminer le vecteur colonne propre associé V dont la somme des composantes vaut $d+1$.
    (c) Établir que $-1 \notin \mathrm{Sp}\,(A)$ et que si $|\lambda| > 1$, alors $\lambda \notin \mathrm{Sp}\,(A)$.

16. On pose pour tout $k \in [\![0, d]\!]$, $b_k = \sum_{i=k}^{d} a_i$. On définit aussi le sous-espace vectoriel H de $\mathcal{M}_{d+1,1}(\mathbb{R})$ formé des matrices $W = \begin{pmatrix} w_0 \\ w_1 \\ \vdots \\ w_d \end{pmatrix}$ telles que $\sum_{k=0}^{d} b_k w_k = 0$.
    (a) Montrer que pour tout $W \in H$, $AW \in H$.
    (b) Déterminer l'unique réel s tel que $U_0 - sV \in H$.
    (c) Nous admettons que, pour tout $W \in H$, $LA^nW \to 0$ quand $n \to +\infty$.
    (d) En déduire que $\lim_{n\to+\infty} z_n = s$.

17. Sous quelle(s) hypothèse(s), parmi les trois hypothèses (H_1), (H_2) et (H_3) faites dans cette partie, la série $\sum_{n=0}^{+\infty} z_n$ est-elle convergente ? Comment interpréter ce résultat ?