Révisions 3

Sujet EML

Exercice 1 (EML 2023 - Sujet zéro)

On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Le but de cette question est de diagonaliser la matrice A.
   (a) Justifier que la matrice A est de rang 1.
   (b) En déduire une valeur propre de A ainsi qu'une base du sous-espace propre associé.
   (c) Justifier que 6 est valeur propre de A et qu'un vecteur propre associé est $X_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.
   (d) Déterminer une matrice inversible P et une matrice diagonale D de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $A = PDP^{-1}$.

2. Résoudre le système différentiel :

$$(SH) : \begin{cases} x' &= x + 2y - z \\ y' &= 2x + 4y - 2z \\ z' &= -x - 2y + z \end{cases}$$

3. Soient $X_1 : t \mapsto X_1(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ y_1(t) \\ z_1(t) \end{pmatrix}$ et $X_2 : t \mapsto X_2(t) = \begin{pmatrix} x_2(t) \\ y_2(t) \\ z_2(t) \end{pmatrix}$ deux solutions du système (SH).
   On suppose qu'il existe $t_0 \in \mathbb{R}$ vérifiant $X_1(t_0) = X_2(t_0)$. Que pouvez-vous dire de X_1 et X_2 ?

4. (a) Déterminer la solution $X : t \mapsto X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$ du système (SH) vérifiant $X(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.
   (b) Déterminer la solution $X : t \mapsto X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$ du système (SH) vérifiant $X(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

5. Dans cette question on considère trois fonctions continues $a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
   On s'intéresse au système différentiel :

$$(S) : \begin{cases} x' &= x + 2y - z + a(t) \\ y' &= 2x + 4y - 2z + b(t) \\ z' &= -x - 2y + z + c(t) \end{cases}$$

   où x, y et z sont des fonctions de classe C^1, inconnues, de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, de la variable réelle t.
   Une solution de (S) sur $\mathbb{R}$ est une application $X : t \mapsto \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$ où x, y et z sont des fonctions de classe C^1 de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que, pour tout t réel, on ait :

$$\begin{cases} x'(t) &= x(t) + 2y(t) - z(t) + a(t) \\ y'(t) &= 2x(t) + 4y(t) - 2z(t) + b(t) \\ z'(t) &= -x(t) - 2y(t) + z(t) + c(t) \end{cases}.$$

(a) Préciser quel vecteur colonne $B(t) \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ dépendant de la variable réelle t permet d'écrire le système (S) sous la forme :

$$(S) : \ X' = AX + B(t).$$

(b) Soit Y une solution particulière sur $\mathbb{R}$ de (S). Démontrer que $X : t \mapsto X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$ est solution de (S) sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $Z : t \mapsto X(t) - Y(t)$ est solution de (SH) sur $\mathbb{R}$, (SH) désignant le système de la question 2.

(c) Dans cette question, on pose pour $t \in \mathbb{R}$: $a(t) = 1$, $b(t) = 2(1 - e^t)$, $c(t) = e^t - 1$.

Démontrer que $Y : t \mapsto Y(t) = \begin{pmatrix} e^t \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ est solution de (S) sur $\mathbb{R}$.

En déduire toutes les solutions du système différentiel (S) sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2 (EML 2023)

Pour $x \in]0, +\infty[$, on pose : $f(x) = \dfrac{\exp(-x)}{x}$.

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et par la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$, valable pour tout entier naturel n.

1. (a) Étudier les variations de la fonction $f : x \mapsto f(x)$ (on dressera son tableau de variations, en précisant les limites).

   (b) Vérifier que chaque terme de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est correctement défini et strictement positif.

2. *Informatique.*

   (a) Recopier et compléter la fonction Python suivante afin que l'appel `fonc_1(a)` renvoie le plus petit entier n tel que $u_n > a$.

```
def fonc_1(a):
  from numpy import exp
  u = 1
  n = 0
  while ..... :
    u = exp(-u)/u
    n = .....
  return n
```

   (b) On considère maintenant la fonction Python :

```
def fonc_2(a):
  from numpy import exp
  u = 1
  n = 0
  while u>a :
    u = exp(-u)/u
    n = n+1
  return n
```

   Les appels `fonc_1(10**6)` et `fonc_2(10**(-6))` donnent respectivement 6 et 5.
   Qu'en déduire pour u_5 et u_6 ?
   Commenter ce résultat en une ligne.

(c) Écrire une fonction Python qui a pour argument un entier n et qui renvoie la valeur de u_n.

3. Pour $x \in [0, +\infty[$, on pose : $g(x) = \exp(-x) - x^2$.

   (a) Démontrer que la fonction $g : x \mapsto g(x)$ réalise une bijection de $[0, +\infty[$ sur $]-\infty, 1]$.

   (b) En déduire que l'équation $f(x) = x$, d'inconnue x, possède une unique solution dans l'intervalle $]0, +\infty[$, que l'on notera α.

   (c) Justifier que $\dfrac{1}{\mathrm{e}} < \alpha < 1$. *On rappelle que* $\mathrm{e} \approx 2,7$.

4. (a) Démontrer que l'on a : $u_2 > u_0$.

   (b) En déduire que la suite $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

   (c) Justifier que la suite $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

5. Pour $x \in]0, +\infty[$, on pose : $h(x) = f \circ f(x)$. On pose également $h(0) = 0$.

   (a) Soit x un réel strictement positif. Déterminer $h(x)$.

   (b) Démontrer que la fonction $h : x \mapsto h(x)$ est continue sur $[0, +\infty[$.

   (c) Démontrer que l'équation $h(x) = x$, d'inconnue x, admet exactement deux solutions sur $[0, +\infty[$ qui sont 0 et α, α étant le réel introduit à la question 3.(b).

   (d) En déduire la limite de la suite $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$.

6. La suite $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle majorée ? Admet-elle une limite ?

Exercice 3 (EML 2005)

1. Soit $x \in]0, 1[$. Dans une succession d'épreuves de Bernoulli indépendantes, de même probabilité d'échec x, on définit deux suites de variables aléatoires $(S_n)_{n\geq 1}$ et $(T_n)_{n\geq 1}$ de la façon suivante :

   - pour tout entier naturel n non nul, S_n est la variable aléatoire égale au nombre d'épreuves nécessaires pour obtenir le n-ième succès ;
   - T_1 est la variable aléatoire égale à S_1 et pour tout entier naturel $n \geq 2$, T_n est la variable aléatoire égale au nombre d'épreuves supplémentaires nécessaires pour obtenir le n-ième succès après le $(n-1)$-ième succès.

   Ainsi, pour tout $n \geq 2$, $T_n = S_n - S_{n-1}$ et pour tout $n \geq 1$, $S_n = T_1 + T_2 + \cdots + T_n$.

   (a) Pour tout entier naturel n non nul, déterminer la loi de T_n et, sans calcul, donner l'espérance et la variance de T_n.

   (b) Pour tout entier naturel $n \geq 2$, justifier l'indépendance des variables aléatoires $T_1, T_2, \ldots, T_n$.

   (c) Pour tout entier naturel n non nul, montrer que l'espérance et la variance de S_n sont définies et montrer :
   $$E(S_n) = \frac{n}{1-x} \quad \text{et} \quad V(S_n) = \frac{nx}{(1-x)^2}.$$

   (d) Soit n un entier naturel non nul. Déterminer la loi de S_n.

   Que peut-on dire, sans calcul, de la valeur de $\displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} P(S_n = k)$?

   (e) En déduire, pour tout $x \in]0, 1[$ et pour tout entier naturel n non nul :
   $$\sum_{k=n}^{+\infty} \binom{k-1}{n-1} x^k = \frac{x^n}{(1-x)^n}.$$

2. Deux joueurs A et B procèdent chacun à une succession de lancers d'une même pièce. A chaque lancer, la probabilité d'obtenir pile est p (p fixé, $p \in]0,1[$), et la probabilité d'obtenir face est $q = 1-p$.

   Le joueur A commence et il s'arrête quand il obtient le premier pile. On note X la variable aléatoire égale au nombre de lancers effectués par le joueur A.

   Le joueur B effectue alors autant de lancers que le joueur A et on note Y la variable aléatoire égale au nombre de piles obtenu par le joueur B.

   (a) Rappeler la loi de X et, pour tout $k \geq 1$, donner la loi conditionnelle de Y sachant $(X = k)$.

   (b) Quelles sont les valeurs prises par Y ?

   (c) Montrer : $P(Y=0) = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} pq^{2k-1} = \frac{q}{1+q}$.

   (d) Soit n un entier naturel non nul.

   Montrer que $P(Y=n) = \displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} \binom{k}{n} p^{n+1} q^{2k-n-1}$.

   En utilisant la question 1.(e), en déduire que $P(Y=n) = \dfrac{1}{(1+q)^2}\left(\dfrac{q}{1+q}\right)^{n-1}$.

   (e) Montrer que Y admet une espérance et la calculer.

   (f) On rappelle les commandes `Python` suivantes qui permettent de simuler des variables usuelles discrètes :

   - `rd.randint(a, b+1)` simule une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[\![a, b]\!]$,
   - `rd.binomial(n, p)` simule une variable aléatoire suivant la loi binomiale de paramètres n et p,
   - `rd.geometric(p)` simule une variable aléatoire suivant la loi géométrique de paramètre p,
   - `rd.poisson(a)` simule une variable aléatoire suivant la loi de Poisson de paramètre a.

   Compléter le programme `Python` ci-dessous pour que, étant donné un réel $p \in]0,1[$, il simule l'expérience aléatoire étudiée et affiche la valeur de Y.

```
def simulY(p):
    x = .....
    y = .....
    return(y)
```

   (g) En exécutant les instructions suivantes :

```
s = 0
for k in range(10000):
    s = s + simulY(1/2)
print(s/10000)
```

   on obtient `0.9948`. Ce résultat est-il conforme à vos attentes ? Expliquer.