Révisions 4

Sujet EML

Exercice 1 (EML 2024)

On considère l'équation différentielle

$$(E) \ : \quad x'(t) = -x(t) + e^{-t},$$

où x est une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

1. (a) Résoudre l'équation différentielle homogène $x'(t) = -x(t)$ sur $\mathbb{R}$.
   (b) Déterminer une solution particulière x_0 de (E) de la forme $x_0 : t \mapsto (at+b)e^{-t}$ avec $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.
   (c) Résoudre l'équation différentielle (E).

On s'intéresse maintenant au système différentiel :

$$(S) \ : \quad \begin{cases} x'(t) &= -x(t) + y(t) \\ y'(t) &= -y(t) \end{cases}$$

où x et y désignent des fonctions définies et dérivables sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

2. (a) Donner la matrice $A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ telle que

$$(S) \Leftrightarrow X'(t) = AX(t) \quad \text{avec} \quad X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}.$$

   La matrice A est–elle diagonalisable ?
   (b) Justifier l'existence d'une unique solution (x,y) de (S) telle que $x(0) = 1$ et $y(0) = 1$.
   (c) Déterminer cette solution (x,y) en vous aidant de la question 1.
   (d) Étudier la convergence de la solution (x,y) vers un état d'équilibre lorsque t tend vers $+\infty$.

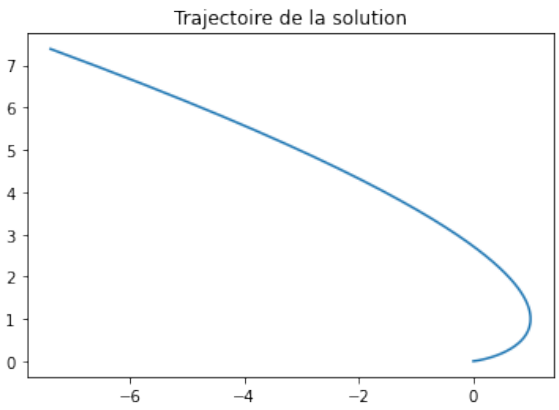
3. Recopier et compléter le programme en langage Python ci–dessous de manière à ce qu'il produise le graphique sur la droite représentant la trajectoire $t \mapsto (x(t), y(t))$ pour $t \in [-2, 10]$.

   On rappelle que la commande `np.linspace(-2,10,200)` crée une liste de 200 valeurs régulièrement espacées allant de -2 à 10.

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

T = np.linspace(-2,10,200)
x = [ ... for t in T]
y = [ ... for t in T]

plt.title("Trajectoire de la solution")
plt.plot( ... )
plt.show()
```



Exercice 2 (EML 2002)

On considère, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction polynomiale $P_n : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ définie pour tout $x \in [0, +\infty[$, par :

$$P_n(x) = \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k x^k}{k} = -x + \frac{x^2}{2} + \ldots + \frac{-x^{2n-1}}{2n-1} + \frac{x^{2n}}{2n}$$

I. Étude des fonctions polynomiales $\mathbf{P_n}$

1. Montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in [0, +\infty[$:

$$P_n'(x) = \frac{x^{2n} - 1}{x + 1} \quad \text{où } P_n' \text{ désigne la dérivée de } P_n.$$

2. Établir, pour $n \in \mathbb{N}^*$, les variations de P_n sur $[0, +\infty[$ et dresser le tableau de variations de P_n.

3. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P_n(1) < 0$.

4. (a) Vérifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in [0, +\infty[$,

$$P_{n+1}(x) = P_n(x) + x^{2n+1}\left(-\frac{1}{2n+1} + \frac{x}{2n+2}\right).$$

   (b) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P_n(2) \geq 0$.

5. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $P_n(x) = 0$, d'inconnue $x \in [1, +\infty[$, admet une solution et une seule notée x_n, et que :

$$1 < x_n \leq 2.$$

6. Écrire un programme en langage `Python` qui calcule une valeur approchée décimale de x_2 à 10^{-3} près.

II. Limite de la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$

7. Établir que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in [0, +\infty[$,

$$P_n(x) = \int_0^x \frac{t^{2n} - 1}{t + 1}\, dt.$$

8. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\int_1^{x_n} \frac{t^{2n} - 1}{t + 1}\, dt = \int_0^1 \frac{1 - t^{2n}}{t + 1}\, dt$$

9. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $t \in [1, +\infty[$,

$$t^{2n} - 1 \geq n(t^2 - 1).$$

10. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\int_1^{x_n} \frac{t^{2n} - 1}{t + 1}\, dt \geqslant \frac{n}{2}(x_n - 1)^2 \ ,$$

puis :

$$0 < x_n - 1 \leq \frac{\sqrt{2 \ln 2}}{\sqrt{n}}$$

11. Conclure quant à la convergence et à la limite de la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

Exercice 3 (EML sujet zero 2022 + ECRICOME 2022)
Les deux parties de cet exercice sont largement indépendantes. La deuxième partie utilise simplement les résultats de la question 6.

Partie 1 : Espaces vectoriels et calcul matriciel.

Dans toute cette partie, $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices carrées d'ordre 3 à coefficients réels. On notera respectivement I_3 et 0_3 la matrice identité et la matrice nulle de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

Soit F l'ensemble des matrices de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ de la forme $\begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$, où a et b sont des réels quelconques.

Soit G l'ensemble des matrices M de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $M^2 = M$.

1. F est-il un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$?
   Si oui, déterminer une base de F et préciser la dimension de F.
2. G est-il un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$?
   Si oui, déterminer une base de G et préciser la dimension de G.
3. Soit $A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.
   (a) Démontrer que $A \in F \cap G$.
   (b) En déduire un polynôme annulateur de A.
   (c) Déterminer les valeurs propres de A.

On considère dans la suite de cette partie une matrice $M = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$ de F avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

4. (a) Démontrer :
$$M \in G \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + 2b^2 = a \\ b\,(b + 2a - 1) = 0 \end{cases}$$
   (b) Montrer alors que : $F \cap G = \{I_3, 0_3, A, I_3 - A\}$.
5. On note $B = I_3 - A$. Démontrer que (A, B) est une base de F.
6. (a) On note $\alpha = a - b$ et $\beta = a + 2b$. Vérifier que :
$$M = \alpha \cdot A + \beta \cdot B.$$
   (b) Calculer AB et BA.
   (c) Montrer que pour tout entier naturel n :
$$M^n = \alpha^n \cdot A + \beta^n \cdot B.$$
7. (a) Montrer que M est inversible si et seulement si $\alpha \neq 0$ et $\beta \neq 0$.
   (b) Si α et β sont deux réels non nuls, montrer que pour tout entier naturel n, on a :
$$M^{-n} = \alpha^{-n} \cdot A + \beta^{-n} \cdot B.$$

Partie 2 : Étude d'une chaîne de Markov.

On considère trois points distincts du plan A, B et C. Le but de cette partie est d'étudier le déplacement aléatoire d'un pion se déplaçant sur ces trois points.

A l'étape $n = 0$, on suppose que le pion se trouve sur le point A. Ensuite, le mouvement aléatoire du pion respecte les deux règles suivantes :

- le mouvement du pion de l'étape n à l'étape $n+1$ ne dépend que de la position du pion à l'étape n : il ne dépend donc pas des positions occupées aux autres étapes précédentes.
- pour passer de l'étape n à l'étape $n+1$, on suppose que le pion a une chance sur deux de rester sur place, sinon il se déplace de manière équiprobable vers l'un des deux autres points.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note :

- A_n l'évènement "le pion se trouve en A à l'étape n",
- B_n l'évènement "le pion se trouve en B à l'étape n",
- C_n l'évènement "le pion se trouve en C à l'étape n".

Pour tout n entier naturel, on note également : $p_n = P(A_n)$, $q_n = P(B_n)$, $r_n = P(C_n)$ ainsi que $V_n = \begin{pmatrix} p_n & q_n & r_n \end{pmatrix}$, le n-ème état probabiliste de cette chaîne de Markov.

Partie 2.1 : Modélisation.

8. (a) Représenter la situation par un graphe probabiliste et expliciter la matrice de transition M associée.

   (b) On décide de représenter les sommets A, B et C sur `Python` par les numéros 1, 2 et 3 respectivement.

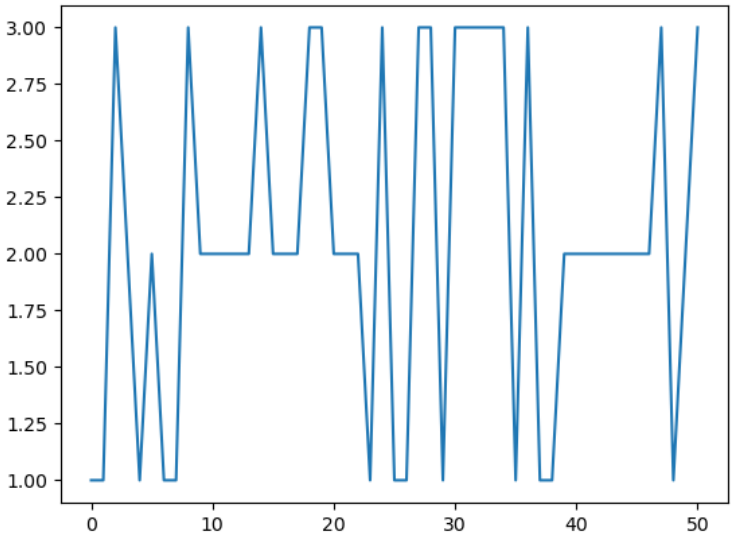
   Compléter la fonction `etape_suivante(i)` afin qu'elle prenne en entrée un paramètre $i \in [\![1, 3]\!]$ correspondant au sommet où se trouve le pion à un instant donné, qu'elle simule son déplacement et retourne sa position à l'instant suivant :

```
def etape_suivante(i):
    j = i
    p = rd.random()
    if i == 1:
        if ..... :
            j = 2
        elif ..... :
            j = .....
    if i == ..... :
        if ..... :
            j = .....
        elif ..... :
            j = .....
    if i == ..... :
        if ..... :
            j = .....
        elif ..... :
            j = .....
    return(j)
```

(c) On considère alors le programme suivant :

```
X = np.zeros(51)
X[0] = 1
for k in range(50):
    X[k+1] = etape_suivante(X[k])
n = np.arange(51)
plt.plot(n, X)
plt.show()
```

On obtient le résultat graphique suivant :



Que fait ce programme ? Comment interpréter le résultat graphique obtenu ?

9. Montrer que la chaîne de Markov admet un unique état stable que l'on déterminera.

Partie 2.2 : Calcul du n-ième état probabiliste.

10. (a) Déterminer p_0, q_0, r_0 ainsi que p_1, q_1, r_1.
    (b) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a la relation : $V_{n+1} = V_n M$.
    (c) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $V_n = V_0 M^n$.

11. (a) En utilisant les résultats démontrés à la question 6, montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$M^n = \frac{1}{3 \times 4^n} \begin{pmatrix} 4^n + 2 & 4^n - 1 & 4^n - 1 \\ 4^n - 1 & 4^n + 2 & 4^n - 1 \\ 4^n - 1 & 4^n - 1 & 4^n + 2 \end{pmatrix},$$

où M est la matrice de transition de la chaîne de Markov obtenue à la question 8.(a).

(b) En déduire p_n, q_n et r_n en fonction de n puis les limites respectives des suites $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Interpréter ces résultats.

Partie 2.3 : Nombre moyen de passages en A.

12. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la variable aléatoire :

$$X_n = \begin{cases} 1 \text{ si } A_n \text{ est réalisé} \\ 0 \text{ si } \overline{A_n} \text{ est réalisé} \end{cases}$$

(a) Interpréter la variable aléatoire $S_n = X_1 + \ldots + X_n$. Que représente l'espérance $E(S_n)$?

(b) Compléter la fonction `Python` suivante pour que, étant donné un entier naturel n non nul, elle simule la variable aléatoire S_n :

```
def simulS(n):
    x = 1
    c = 0
    for k in range(1,n+1):
        x = etape_suivante(x)
        if ..... :
            c = ....
    return(c)
```

(c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer l'espérance de la variable aléatoire X_n.

(d) En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le nombre moyen de passage en A entre l'étape 1 et l'étape n.

Partie 2.4 : Temps d'attente avant le premier passage en B.

13. On définit la variable aléatoire T_B de la façon suivante : T_B est le numéro de l'étape à laquelle le pion passe pour la première fois en B.

(a) Compléter la fonction `Python` suivante pour qu'elle simule la variable aléatoire T_B :

```
def simulTB():
    x = 1
    c = 0
    while ..... :
        x = etape_suivante(x)
        c = .....
    return(c)
```

(b) Calculer les probabilités $P(T_B = 1)$ et $P(T_B = 2)$.

(c) Démontrer que $P(\overline{B_1} \cap \overline{B_2} \cap B_3) = \frac{1}{4}P(\overline{B_1} \cap \overline{B_2})$. En déduire que $P_{\overline{B_1} \cap \overline{B_2}}(B_3) = \frac{1}{4}$.

Dans la suite, on note D_n l'événement $\bigcap_{k=1}^{n} \overline{B_k}$ et on admettra que : $P_{D_n}(B_{n+1}) = \frac{1}{4}$.

(d) Montrer que, pour tout entier $k \in \mathbb{N}^*$: $P(T_B = k) = \frac{1}{4}P(T_B \geq k)$.

(e) Justifier que, pour tout entier $k \in \mathbb{N}^*$: $P(T_B \geq k) = P(T_B = k) + P(T_B \geq k+1)$.

(f) En déduire que, pour tout entier $k \in \mathbb{N}^*$: $P(T_B = k+1) = \frac{3}{4}P(T_B = k)$.

(g) En déduire $P(T_B = k)$ puis donner sans calcul l'espérance et la variance de T_B.