Révisions 5

Sujet EDHEC

Exercice 1 (EDHEC 2021)

Soit f la fonction de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R},\ f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy.$$

Partie 1

1. Justifier que f est une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.
2. (a) Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 de f.
   (b) Déterminer les points critiques de f.
3. (a) Calculer les dérivées partielles d'ordre 2 de f.
   (b) Vérifier que f ne présente un extremum local qu'en un seul de ses points critiques et préciser sa nature et sa valeur.
4. Cet extremum est-il global ?

Partie 2

On note g la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = f(x,1).$$

5. (a) Montrer que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 4, l'équation $g(x) = n$, d'inconnue x, possède une unique solution que l'on notera u_n.
   (b) Compléter le programme suivant pour que, étant donné un entier $n \geq 4$, il retourne une approximation de u_n à 10^{-1} près.

```
def suiteu (n) :
  u = 1
  while ..... :
    u = u + 0.1
  return .....
```

6. On note h la restriction de g à $[1, +\infty[$.
   (a) Dresser le tableau de variations de h^{-1}.
   (b) Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.
   (c) En déduire, en revenant à la définition de u_n, le réel α pour lequel on a : $u_n \underset{n \to +\infty}{\sim} n^{\alpha}$.

Exercice 2 (EDHEC 2021)

On considère un nombre réel a élément de $]0,1[$ et la matrice

$$M_a = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1-a & a & 0 \\ 0 & 1-a & a \end{pmatrix}.$$

1. On pose $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et on note E l'espace vectoriel engendré par I, M_a et M_a^2.

(a) Quelle est la dimension de E ?

(b) On pose $J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $K = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Calculer JK^2 puis en déduire $(M_a - I)(M_a - aI)^2$.

(c) En déduire que M_a^3 appartient à E.

2. (a) Montrer que, pour tout entier naturel n, il existe un unique triplet de réels (u_n, v_n, w_n) tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad M_a^n = u_n M_a^2 + v_n M_a + w_n I.$$

On donnera les valeurs de u_0, v_0 et w_0 et on écrira les relations liant u_{n+1}, v_{n+1}, w_{n+1} à u_n, v_n et w_n.

(b) En utilisant les relations précédentes, expliquer pourquoi le script Python qui suit ne permet pas de calculer et d'afficher les valeurs de u_n, v_n et w_n lorsque n et a sont entrés par l'utilisateur. On pourra examiner attentivement la boucle for.

```python
n = input('entrez une valeur pour n :')
a = input('entrez une valeur pour a :')
u = 0
v = 0
w = 1
for k in range(n):
    u = (2*a+1)*u+v
    v = -a*(a+2)*u+w
    w = a*a*u
print(w,v,u)
```

(c) Modifier la boucle de ce script en conséquence.

3. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+3} = (2a+1)u_{n+2} - a(a+2)u_{n+1} + a^2 u_n$.

On admet que l'on peut en déduire u_n, pour tout entier naturel n, sous la forme :

$$u_n = \frac{(n-1)a^n - na^{n+1} + 1}{(a-1)^2}$$

4. On dit qu'une suite de matrices $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers la matrice A lorsque n tend vers $+\infty$ si chaque coefficient de A_n tend vers le coefficient situé à la même place dans A.

Il en résulte (et on admet ce résultat) que :

$$\lim_{n\to\infty} M_a^n = \left(\lim_{n\to\infty} u_n\right) M_a^2 + \left(\lim_{n\to\infty} v_n\right) M_a + \left(\lim_{n\to\infty} w_n\right) I.$$

(a) Déterminer $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$, puis $\lim\limits_{n\to\infty} v_n$ et $\lim\limits_{n\to\infty} w_n$.

(b) En déduire la limite L_a de la suite $(M_a^n)_{n\in\mathbb{N}}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

(c) Vérifier que $L_a^2 = L_a$.

Exercice 3 (EDHEC 2011)

On désigne par n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On dispose de n urnes, numérotées de 1 à n, contenant chacune n boules. On répète n épreuves, chacune consistant à choisir une urne au hasard et à en extraire une boule au hasard. On suppose que les choix des urnes sont indépendants les uns des autres.

Pour tout i de $\{1, 2, ..., n\}$, on note X_i la variable aléatoire prenant la valeur 1 si l'urne numérotée i contient toujours n boules au bout de ces n épreuves, et qui prend la valeur 0 sinon.

1. (a) Pour tout i et tout k, éléments de $\{1, 2, ..., n\}$, on note $U_{i,k}$ l'événement "l'urne numéro i est choisie à la $k^{\text{ème}}$ épreuve".
   Ecrire l'événement $(X_i = 1)$ à l'aide de certains des événements $U_{i,k}$, puis montrer que :
   $$\forall i \in \{1, 2, ..., n\}, \ P(X_i = 1) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n.$$
   (b) Justifier également que, si i et j sont deux entiers distincts, éléments de $\{1, 2, ..., n\}$, on a :
   $$P([X_i = 1] \cap [X_j = 1]) = \left(1 - \frac{2}{n}\right)^n.$$
   (c) Comparer $\left(1 - \frac{2}{n}\right)$ et $\left(1 - \frac{1}{n}\right)^2$ et en déduire que, si i et j sont deux entiers distincts, éléments de $\{1, 2, ..., n\}$, alors les variables X_i et X_j en sont pas indépendantes.

2. On pose $Y_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$.
   (a) Déterminer l'espérance de Y_n, notée $E(Y_n)$.
   (b) En déduire $\lim_{n\to+\infty} \frac{E(Y_n)}{n}$ et donner un équivalent de $E(Y_n)$ lorsque n est au voisinage de $+\infty$.

3. Pour tout i de $\{1, 2, ..., n\}$, on note N_i la variable aléatoire égale au nombre de boules manquantes dans l'urne numérotée i à la fin de ces n épreuves.
   (a) Donner sans calcul la loi de N_i ainsi que la valeur de $E(N_i)$.
   (b) Que vaut le produit $N_i X_i$?
   (c) Les variables N_i et X_i sont-elles indépendantes ?

4. Compléter le programme informatique suivant pour qu'il simule l'expérience décrite au début de cet exercice et affiche les valeurs prises par X_1 et N_1 pour une valeur de n entrée par l'utilisateur.

```python
n = int(input('Donner un entier n superieur ou egal a 2'))
x1 = 1
n1 = 0
for k in range(n):
  hasard = np.floor(rd.random()*n) + 1
  if hasard == 1:
    x1 = .....
    n1 = .....
print(x1, n1)
```

Exercice 4 (EDHEC 2023)

Partie 1 : propriété d'une loi de probabilité

On désigne par c un réel strictement positif et on considère la fonction f définie par :
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{c}{x^{1+c}} & \text{si } x \geq 1, \\ 0 & \text{si } x < 1. \end{cases}$$

1. Montrer que f peut être considérée comme une densité.

On considère dans la suite une variable X de densité f et on note F sa fonction de répartition. On dit que X suit la loi de Pareto de paramètre c.

2. Déterminer, pour tout réel x, l'expression de $F(x)$ en fonction de x et c.
3. Soit t un réel strictement supérieur à 1.
   (a) Déterminer la probabilité conditionnelle $P_{(X>t)}(X \leq tx)$.
   On distinguera les cas $x \geq 1$ et $x < 1$.
   (b) En déduire que la loi de $\dfrac{X}{t}$, conditionnellement à l'événement $(X > t)$, est la loi de X.

Partie 2 : réciproque de la propriété précédente
On considère une variable aléatoire Y de densité g nulle sur $]-\infty, 1[$, strictement positive et continue sur $[1, +\infty[$. On pose $c = g(1)$ et on note G la fonction de répartition de Y.

Dans toute la suite, on suppose que, pour tout réel t strictement supérieur à 1, on a :

- $P(Y > t) > 0$,
- La loi de $\dfrac{Y}{t}$, conditionnellement à l'événement $(Y > t)$, est la loi de Y.

On veut alors montrer que Y suit une loi de Pareto de paramètre c.

4. Justifier que $G(1) = 0$.
5. (a) Établir l'égalité :
$$\forall x \geq 1, \forall t > 1, \quad G(x) = \frac{G(tx) - G(t)}{1 - G(t)}$$
   (b) Justifier que G est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]1, +\infty[$ et en déduire que :
$$\forall x > 1, \forall t > 1, \quad G'(x) = \frac{tG'(tx)}{1 - G(t)}$$
   (c) Montrer enfin la relation :
$$\forall t > 1, \quad G(t) + \frac{t}{c}\, G'(t) = 1$$
6. Dans cette question, la lettre y désigne une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]1, +\infty|$ qui, à tout réel t de $]1, +\infty[$, associe $y(t)$. On note (E_1) l'équation différentielle
$$y + \frac{t}{c}\, y' = 0$$
   et (E_2) l'équation différentielle
$$y + \frac{t}{c}\, y' = 1.$$
   Il convient de noter que ces équations différentielles ne sont pas à coefficients constants.
   (a) Soit z la fonction définie par $z(t) = t^c y(t)$.
   Montrer que y est solution de l'équation différentielle (E_1) si et seulement si z est constante sur $]1, +\infty[$.
   (b) En notant K la constant évoquée à la question précédente, donner toutes les solutions de (E_1).
   (c) Trouver une fonction u, constante sur $]1, +\infty[$, et solution de l'équation différentielle (E_2).
   (d) Montrer l'équivalence : h solution de (E_2) $\Leftrightarrow$ $h - u$ solution de (E_1).

(e) En déduire que les solutions de l'équation différentielle (E_2) sont les fonctions h définies par :

$$\forall t > 1, \quad h(t) = 1 + \frac{K}{t^c}$$

7. (a) Montrer finalement que l'on a :

$$\forall t > 1, \quad G(t) = 1 - \frac{1}{t^c}$$

(b) Vérifier que cette relation s'étend à $[1, +\infty[$, puis conclure quant à la loi de Y.

Partie 3 : simulation d'une variable suivant la loi de Pareto de paramètre c

8. On pose $Z = \ln(X)$ et on admet que Z est une variable aléatoire définie sur le même espace probabilisé que X. On note H sa fonction de répartition.

(a) Pour tout réel x, exprimer $H(x)$ à l'aide de la fonction F.

(b) En déduire que Z suit une loi exponentielle dont on précisera le paramètre.

(c) Écrire une fonction `Python` d'en-tête `simulX(c)` et permettant de simuler X.
