Révisions 6

Sujet EDHEC

Exercice 1 (EDHEC 2009)

Les parties 1 et 2 sont indépendantes.

Partie 1 : Un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$

On note e_0, e_1, e_2 les fonctions définies par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad e_0(t) = 1, \quad e_1(t) = t, \quad e_2(t) = t^2.$$

On rappelle que la famille (e_0, e_1, e_2) est une base de l'espace vectoriel E constitué des fonctions polynomiales de degré inférieur ou égal à 2.
On considère l'application f qui, à tout élément P de E associe $f(P) = P'' - 5P' + 6P$, où P' et P'' désignent respectivement les dérivées première et seconde de P.

1. Montrer que f est un endomorphisme de E.
2. Écrire la matrice A de f relativement à la base (e_0, e_1, e_2).
3. Établir que f est un automorphisme de E. En déduire $Ker(f)$.
4. Déterminer la seule valeur propre λ de A. La matrice A est-elle diagonalisable ?

Partie 2 : Un endomorphisme de $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

On note F l'espace vectoriel des fonctions de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et Id l'endomorphisme identité de F.
On considère l'application g qui, à toute fonction u de F, associe $g(u) = u'' - 5u' + 6u$, où u' et u'' désignent respectivement les dérivées première et seconde de u.

5. Montrer que g est un endomorphisme de F.
6. Dans cette question, on se propose de déterminer $Ker\,(g - 6Id)$.
   (a) Résoudre l'équation différentielle $(\mathscr{E}_1)$: $u'' - 5u' = 0$.
   (b) En déduire que (u_1, u_2) est une base de $Ker\,(g - 6Id)$, où u_1 est la fonction constante égale à 1 et u_2 la fonction définie pour tout réel x par $u_2(x) = e^{5x}$.
7. Dans cette question, on se propose de déterminer $Ker\,(g)$.
   (a) Résoudre l'équation différentielle $(\mathscr{E}_2)$: $u'' - 5u' + 6u = 0$.
   (b) En déduire une base de $Ker(g)$.

Exercice 2 (EDHEC 2009)

Dans cet exercice, p désigne un réel de $]0;1[$ et on note $q = 1 - p$.
On considère deux variables aléatoires X et Y définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, indépendantes et suivant toutes deux la même loi géométrique de paramètre p.

1. On pose $Z = \inf(X, Y)$ et on admet que Z est une variable aléatoire, elle aussi définie sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
   On rappelle que, pour tout entier naturel k, on a l'égalité : $(Z > k) = (X > k) \cap (Y > k)$.
   (a) Pour tout entier naturel k, calculer $P(Z > k)$.

(b) Établir que, pour tout entier naturel k supérieur ou égal à 1, on a :

$$P(Z = k) = P(Z > k - 1) - P(Z > k).$$

(c) En déduire que Z suit la loi géométrique de paramètre $(1 - q^2)$.

2. On définit la variable aléatoire T de la façon suivante :

   Pour tout ω de Ω tel que $X(\omega)$ est un entier naturel pair, on pose $T(\omega) = \dfrac{X(\omega)}{2}$, et, pour tout ω de Ω tel que $X(\omega)$ est un entier naturel impair, on pose $T(\omega) = \dfrac{1 + X(\omega)}{2}$.

   On admet que T est une variable aléatoire, elle aussi définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

   (a) Montrer que T prend des valeurs entières non nulles.

   (b) Réciproquement, justifier que tout entier naturel k non nul est élément de $T(\Omega)$ et en déduire que $T(\Omega) = \mathbb{N}^*$.

   (c) Exprimer l'événement $(T = k)$ en fonction de certains événements $(X = i)$ puis montrer que T suit la même loi que Z.

3. On rappelle que la fonction `rd.random()` renvoie sur `Python` de façon uniforme un réel aléatoire élément de $]0; 1[$.

   Compléter le programme suivant pour que, d'une part, il simule les lancers d'une pièce donnant "*pile*" avec la probabilité p et calcule la valeur prise par la variable aléatoire X égale au rang du premier "*pile*" obtenu lors de ces lancers (X suit bien la loi géométrique de paramètre p) et pour que, d'autre part, il calcule et affiche la valeur prise par T, la variable aléatoire T ayant été définie dans la deuxième question.

```python
p = input("donner p :")
x = 1
while ..... :
    x = .....
if (-1)**x == 1:
    t = .....
else:
    t = .....
print(t)
```

Exercice 3 (EDHEC 2003)

1. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}^*, \ \dfrac{e^x - 1}{x} > 0$.

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \begin{cases} \ln\left(\dfrac{e^x - 1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$

2. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.

3. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]-\infty; 0[$ et sur $]0; +\infty[$, puis préciser $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$.

4. Montrer que : $\lim\limits_{x \to 0} f'(x) = \dfrac{1}{2}$.

   On admettra alors que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et que $f'(0) = \dfrac{1}{2}$.

5. (a) Étudier les variations de la fonction g définie par : $\forall x \in \mathbb{R}, \ g(x) = xe^x - e^x + 1$.

(b) En déduire le signe de $g(x)$, puis dresser le tableau de variation de f (limites comprises).

On considère la suite (u_n) définie par la donnée de son premier terme $u_0 > 0$ et par la relation, valable pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = f(u_n)$.

6. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n > 0$.
7. (a) Vérifier que : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) - x = f(-x)$.
   (b) En déduire le signe de $f(x) - x$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
   (c) Montrer que la suite (u_n) est décroissante.
8. En déduire que (u_n) converge et donner sa limite.
9. Écrire un programme en `Python` permettant de déterminer et d'afficher le plus petit entier naturel n pour lequel $u_n \leq 10^{-3}$, dans le cas où $u_0 = 1$.

Exercice 4 (EDHEC 2019)

Partie 1 : Étude de quelques propriétés d'une variable aléatoire X

Dans cette exercice, θ désigne un réel élément de $\left]0, \dfrac{1}{2}\right[$.

On considère la fonction f définie par : $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\theta x^{1+\frac{1}{\theta}}} & \text{si } x \geq 1 \\ 0 & \text{si } x < 1 \end{cases}$.

1. Montrer que f peut être considérée comme une densité.

On considère dans la suite une variable aléatoire X de densité f et on note F sa fonction de répartition.

2. Montrer que X possède une espérance et une variance et les déterminer.
3. Déterminer, pour tout réel x, l'expression de $F(x)$ en fonction de x et θ.
4. (a) Montrer que l'équation $F(x) = \dfrac{1}{2}$ possède une seule solution, notée M_e, que l'on déterminera.
   (b) Montrer que : $\forall x \in \left[0, \dfrac{1}{2}\right],\ 2^x(1-x) \leq 1$.
   (c) Comparer $E(X)$ et M_e.
5. Soit a un réel supérieur ou égal à 1 et b un réel strictement positif.
   (a) Montrer que $P_{(X>a)}(X > a+b) = \left(\dfrac{a}{a+b}\right)^{1/\theta}$.
   (b) Déterminer la limite de cette quantité lorsque a tend vers $+\infty$. Interpréter cette dernière valeur si l'on admet que la variable X représente la durée de vie d'un certain appareil.

Partie 2 : Simulation de X

6. On pose $Y = \ln(X)$ et on admet que Y est une variable aléatoire définie sur le même espace probabilisé que X. On note G sa fonction de répartition.
   (a) Pour tout réel x, exprimer $G(x)$ à l'aide de la fonction F.
   (b) En déduire que Y suit une loi exponentielle dont on précisera le paramètre.
7. On rappelle qu'en `Python`, la commande `rd.exponential(1/lambda)` simule une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre λ.

   Écrire des commandes `Python` permettant de simuler X.

Partie 3 : Estimation d'un paramètre

On suppose dans la suite que le paramètre θ est inconnu et on souhaite en trouver une estimation ponctuelle puis par intervalle de confiance.

On considère pour cela n variables aléatoires $Y_1, \ldots, Y_n$ toutes définies sur le même espace probabilisé, mutuellement indépendantes, et suivant toutes la même loi que Y.

8. On pose $T_n = \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} Y_k$.

   (a) Justifier que T_n est un estimateur de θ.

   (b) Déterminer l'espérance et la variance de T_n.

9. (a) Écrire l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev pour la variable T_n.

   (b) Établir l'inégalité : $\forall \varepsilon > 0, \quad P\Big(\theta \in [T_n - \varepsilon, T_n + \varepsilon]\Big) \geq 1 - \dfrac{\theta^2}{n\varepsilon^2}$.

   (c) En utilisant le fait que $\theta \leq \dfrac{1}{2}$, déterminer un intervalle de confiance pour θ au niveau de confiance 90% lorsqu'on choisit $n = 1000$.