

Révisions de première année

Dans chaque feuille de TD/TP, les exercices sont classés par niveau de difficulté :

★ : facile (application directe du cours),

★★ : intermédiaire,

★★★ : difficile.

Sommes et produits

Exercice 1 (★)

Calculer les sommes suivantes ($n \in \mathbb{N}^*$) :

$$(1) \sum_{k=1}^n (3k^2 + 4k - 1)$$

$$(2) \sum_{k=n}^{3n} k^2$$

$$(3) \sum_{k=0}^n (-1)^k 3^{n-k}$$

$$(4) \sum_{k=1}^n \frac{2^{2k+1}}{5^{k-1}}$$

$$(5) \sum_{k=1}^n \left(k^2 + 3 \times \left(-\frac{1}{2} \right)^k \right)$$

$$(6) \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k}}$$

Exercice 2 (★★)

On se propose de calculer, pour tout entier $n \geq 2$, la somme suivante :

$$S_n = \sum_{k=2}^n \frac{k-5}{k(k^2-1)}$$

1. Montrer que pour tout entier $k \geq 2$,

$$\frac{k-5}{k(k^2-1)} = \frac{5}{k} - \frac{2}{k-1} - \frac{3}{k+1}.$$

2. En déduire l'expression de S_n en fonction de n .

Exercice 3 (★)

Calculer les produits suivants ($n \in \mathbb{N}^*$) :

$$(1) \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{1}{k+1} \right)$$

$$(2) \prod_{k=1}^n \frac{2^{2k}}{5^k}$$

$$(3) \prod_{k=n}^{2n} \frac{3^k}{4^{k-n}}$$

Exercice 4 (★★)

Calculer les sommes suivantes :

$$(1) \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{k}{2^{n-k}}$$

$$(2) \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{(-1)^k}{k+1}$$

$$(3) \sum_{k=0}^n k(n-k) \binom{n}{k}$$

$$(4) \sum_{k=0}^n 2^k k^2 \binom{n}{k}$$

Exercice 5 (★)

Calculer les sommes doubles suivantes :

$$(1) \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} ij$$

$$(2) \sum_{1 \leq i < j \leq n} (i+j)$$

$$(3) \sum_{0 \leq i, j \leq n} 2^{i+j}$$

$$(4) \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} \frac{i}{j}$$

Exercice 6 (★★)

Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer les sommes doubles suivantes :

$$(1) \sum_{0 \leq i \leq j \leq n} \binom{j}{i}$$

$$(2) \sum_{0 \leq p \leq k \leq n} 3^{n-k} \binom{n}{k} \binom{k}{p}$$

Suites réelles

Exercice 7 (★)

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 0$ et par la relation : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 3u_n + 4^n$.

1. $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est-elle une suite arithmético-géométrique ?

2. Pour tout entier naturel n , on pose $v_n = \frac{u_n}{4^n}$.

Vérifier que : $\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = \frac{3}{4}v_n + \frac{1}{4}$.

3. En déduire l'expression de v_n en fonction de n puis celle de u_n .

Exercice 8 (★)

On considère les suites $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies par $x_0 = 0, y_0 = -1$ et les relations :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} x_{n+1} = 5x_n + y_n \\ y_{n+1} = -6x_n \end{cases}$$

1. Montrer que, pour tout entier naturel n , $x_{n+2} - 5x_{n+1} + 6x_n = 0$.

2. En déduire l'expression de x_n , puis de y_n , en fonction de n .

Exercice 9 (★★)

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 2$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{1 + 2u_n}{2 + u_n}$.

1. (a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est bien définie et $u_n \geq 1$.

(b) Démontrer que, si la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers une limite finie ℓ , alors $\ell = 1$.

Les deux prochaines questions sont consacrées à l'étude de la convergence de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$. On propose deux approches différentes.

2. Première méthode :

(a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 1}$.

Vérifier que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est géométrique.

(b) Déterminer l'expression de v_n en fonction de n puis donner l'expression de u_n en fonction de n .

(c) En déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.

3. Deuxième méthode :

(a) Déterminer le signe de $f(x) = \frac{1 + 2x}{2 + x} - x$ selon les différentes valeurs de x .

(b) En déduire la monotonie de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

(c) Prouver que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et expliciter $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

4. Informatique :

(a) Écrire une procédure Python qui, étant donné un entier naturel n donné, calcule u_n .

(b) Écrire une procédure Python qui, étant donné $\varepsilon > 0$, permet de déterminer le plus petit entier naturel n tel que $|u_n - 1| \leq \varepsilon$.

Exercice 10 (★★)

On considère les deux suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies par la donnée de $u_0 = 1$, $v_0 = 2$, ainsi que par les relations :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{u_n^2}{u_n + v_n} \quad \text{et} \quad v_{n+1} = \frac{v_n^2}{u_n + v_n}.$$

- Montrer que, pour tout entier naturel n , u_n et v_n sont bien définis et que $0 < u_n < v_n$.
 - Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.
En déduire qu'elle converge vers une limite finie qu'on notera ℓ_1 .
 - Montrer que $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.
En déduire qu'elle converge vers une limite finie qu'on notera ℓ_2 .
 - Justifier que $0 \leq \ell_1 \leq \ell_2$.
 - Montrer que, pour tout entier naturel n , $v_n - u_n = 1$.
 - En déduire que $\ell_2 = 1 + \ell_1$.
 - En passant à la limite dans les relations de récurrence, montrer que $\ell_1 = 0$ puis que $\ell_2 = 1$.
-

Exercice 11 (★★)

On considère les deux suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies par $a_0 = 1$, $b_0 = 2$ et que par les relations :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+1} = \sqrt{a_n b_n} \quad \text{et} \quad b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}. \quad (1)$$

- Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, a_n et b_n sont bien définies et strictement positifs.
 - Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{1}{2} (\sqrt{b_n} - \sqrt{a_n})^2$.
En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}, a_n \leq b_n$.
 - Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, a_{n+1} - a_n = (\sqrt{b_n} - \sqrt{a_n}) \sqrt{a_n}$.
En déduire que la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.
 - Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, b_{n+1} - b_n = \frac{1}{2} (a_n - b_n)$.
En déduire que la suite $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.
 - Montrer que la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est majorée par 2.
En déduire qu'elle converge vers une limite finie qu'on notera ℓ_1 .
 - Montrer que la suite $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est minorée par 1.
En déduire qu'elle converge vers une limite finie qu'on notera ℓ_2 .
 - En passant à la limite dans les relations (1), montrer que $\ell_1 = \ell_2$.
-

Exercice 12 (★★)

On considère les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies par $u_0 = 1$, $v_0 = 2$ et les relations :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \quad \text{et} \quad v_{n+1} = \frac{u_{n+1} + v_n}{2}.$$

- Construire une procédure Python qui, étant donné un entier naturel n , permet de calculer et d'afficher u_n et v_n .
- Montrer que, pour tout entier naturel n , $v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{1}{4}(v_n - u_n)$.
 - En déduire que, pour tout entier naturel n , $v_n - u_n = \left(\frac{1}{4}\right)^n$.

3. (a) Étudier la monotonie des suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
 (b) Montrer que les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergent vers une même limite ℓ .
 (c) Construire une procédure Python qui, étant donné $\varepsilon > 0$, permet d'obtenir une approximation de ℓ avec une précision ε .
4. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on pose $w_k = v_k - u_k$ et on considère, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la somme $S_n = \sum_{k=0}^n w_k$.
 (a) Exprimer S_n en fonction de n , à l'aide de la question 2.(b).
 (b) Vérifier que, pour tout entier $k \geq 1$, $w_k = \frac{u_k - u_{k-1}}{2}$.
 En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}, S_n = \frac{u_n + 1}{2}$.
 (c) Avec les deux questions précédentes, exprimer u_n en fonction de n , puis en déduire la valeur de ℓ .

Exercice 13 (★★)

On considère les suites $(u_n)_{n \geq 1}$ et $(v_n)_{n \geq 1}$ définies pour tout entier naturel n non nul par :

$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n) \quad \text{et} \quad v_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n+1).$$

1. (a) On pose $f(x) = \ln(1+x) - x$. Dresser le tableau de variation de f .
 (b) En déduire que, pour tout $x \in]-1, +\infty[$, $\ln(1+x) - x \leq 0$.
 (c) Écrire les commandes en langage Python permettant de tracer la courbe de la fonction f sur l'intervalle $[0, 2]$.
2. (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln(n) \leq 0.$$
 (b) En déduire que la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ est décroissante.
3. (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\frac{1}{n+1} - \ln(n+2) + \ln(n+1) \geq 0.$$
 (b) En déduire que la suite $(v_n)_{n \geq 1}$ est croissante.
4. (a) Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - v_n)$.
 (b) En déduire que $(u_n)_{n \geq 1}$ et $(v_n)_{n \geq 1}$ convergent vers une même limite ℓ .
 (c) Compléter le programme Python suivant pour qu'il calcule et affiche une approximation de ℓ à 10^{-3} près :

```

1 | n = 1
2 | S = 1
3 | u = .....
4 | v = .....
5 | while ..... :
6 |     n = .....
7 |     S = S + 1/n
8 |     u = .....
9 |     v = .....
10 | print(u,v)
```

Exercice 14 (★★)

On considère la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par $S_n = \sum_{k=1}^n \ln \left(1 + \frac{k}{n^2} \right)$.

1. Écrire une procédure Python qui, étant donné un entier $n \geq 1$, calcule et affiche S_n .
2. L'objectif de cette question est de démontrer que, pour tout $x \geq 0$,

$$x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x. \quad (2)$$

- (a) On considère la fonction $f(x) = x - \ln(1+x)$.
Étudier les variations de f et en déduire le signe de f sur $\mathbb{R}_+$.
- (b) On considère la fonction $g(x) = \ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2}$.
Étudier les variations de g et en déduire le signe de g sur $\mathbb{R}_+$.
- (c) En déduire les inégalités (2).

3. Soit n un entier naturel non nul.

- (a) En utilisant les inégalités (2), montrer que, pour tout $1 \leq k \leq n$,

$$\frac{k}{n^2} - \frac{k^2}{2n^4} \leq \ln \left(1 + \frac{k}{n^2} \right) \leq \frac{k}{n^2}. \quad (3)$$

- (b) En sommant les inégalités (3), en déduire l'encadrement suivant :

$$\frac{n+1}{2n} - \frac{(n+1)(2n+1)}{12n^3} \leq S_n \leq \frac{n+1}{2n}.$$

4. (a) Calculer les limites $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+1}{2n}$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n+1)(2n+1)}{12n^3}$.
(b) En déduire que la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge et déterminer sa limite.

5. On considère la suite $(P_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par $P_n = \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{k}{n^2} \right)$.

Faire le lien entre les suites $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(P_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ puis en déduire que la suite $(P_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge et déterminer sa limite.

Fonctions réelles d'une variable réelle**Exercice 15 (★)**

Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer l'ensemble de définition, de continuité et de dérivabilité, les limites aux bornes de l'ensemble de définition (en précisant s'il y a des asymptotes horizontales ou verticales) et la fonction dérivée :

$f(x) = \ln(1+x^2)$	$g(x) = \frac{e^{2x}}{x^2-1}$	$h(x) = \exp\left(x + \frac{1}{x}\right)$
$i(x) = \sqrt{x^2+1} + x$	$j(x) = \ln\left(\frac{2-x}{x+3}\right)$	$k(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+x+1}}$
$l(x) = \ln(3-\sqrt{x})$	$m(x) = x^{1/x}$	$n(x) = (3-x)^{\ln(x)}$

Exercice 16 (★)

On considère la fonction $f(x) = \frac{x}{1 + e^{1/x}}$.

1. Donner l'ensemble de définition, de continuité et de dérivabilité de f .
2. Montrer que f est prolongeable par continuité en 0. On notera encore f le prolongement obtenu.
3. Étudier la dérivabilité de f en 0.

Exercice 17 (★★)

1. Montrer que la fonction $f :]1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \ln(\ln(x))$ est concave.
2. En déduire l'inégalité suivante :

$$\forall x, y \in]1, +\infty[, \ln\left(\frac{x+y}{2}\right) \geq \sqrt{\ln(x)\ln(y)}.$$

Exercice 18 (★★)

1. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = (1-x)e^x + 1$.
 - (a) Étudier les variations de la fonction g sur $\mathbb{R}$. On précisera les limites de g .
 - (b) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution α et une seule sur $\mathbb{R}$.
 - (c) Justifier que $\alpha \in [1, 2]$.
2. Soit f la fonction définie pour tout réel x par : $f(x) = \frac{x}{e^x + 1}$.
 - (a) Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et déterminer $f'(x)$.
 - (b) Dresser le tableau de variation de la fonction f . On précisera les limites de f .
 - (c) Montrer que : $f(\alpha) = \alpha - 1$.
3.
 - (a) Déterminer l'équation de la tangente T à la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de f en 0.
 - (b) Déterminer la position relative de $\mathcal{C}_f$ et de T .
4. Tracer $\mathcal{C}_f$ et T dans un même repère orthonormé (on utilisera le fait que $\alpha \simeq 1.28$).

Exercice 19 (★★)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{1+x}{1+e^x} - x.$$

On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative.

1.
 - (a) Déterminer l'ensemble de définition de f .
 - (b) Écrire $f(x)$ sous la forme d'un quotient et en déduire $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$. Que peut-on en déduire sur $\mathcal{C}_f$?
 - (c) Déterminer le réel a tel que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = a$ puis calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - ax)$. Que peut-on en déduire sur $\mathcal{C}_f$?
2.
 - (a) Justifier que f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ puis expliciter sa dérivée.
 - (b) Montrer que l'équation $\frac{1+x}{1+e^x} = x$ admet une solution et une seule sur $\mathbb{R}_+$ notée x_0 .
 - (c) Justifier que $0 < x_0 < 1$.

Exercice 20 (★★)

Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \ln(e^x + 2x - 1)$$

On notera $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f .

1. Considérons la fonction $g(x) = e^x + 2x - 1$.
 - (a) Étudier les variations de g .
On précisera les limites de g aux bornes de son ensemble de définition.
 - (b) Calculer $g(0)$ et en déduire le signe de $g(x)$ en fonction de x .
2.
 - (a) Déduire des questions précédentes l'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$ de f .
 - (b) Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition. Préciser si $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote verticale ou horizontale.
 - (c) Étudier les variations de f .
 - (d) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur $\mathcal{D}_f$, que l'on notera α .
 - (e) Vérifier que $\frac{1}{4} < \alpha < \frac{1}{2}$ (on pourra utiliser l'approximation $e^{1/4} \simeq 1.28$).
3. Asymptote en $+\infty$.
 - (a) Déterminer le réel a tel que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = a$.
 - (b) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - ax)$ et en déduire que $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote oblique, notée Δ , au voisinage de $+\infty$ dont on précisera l'équation.
 - (c) Étudier la position relative de $\mathcal{C}_f$ par rapport à Δ .
4. Tracer $\mathcal{C}_f$ et Δ dans un même repère orthonormé.

Exercice 21 (★★)

On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = x + 1 + \frac{x - 1 + \ln(x)}{x^2}.$$

On notera $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f .

1. Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$ de f . Est-ce que f est continue et dérivable sur $\mathcal{D}_f$?
2. On introduit la fonction auxiliaire g définie sur $]0, +\infty[$ par $g(x) = x^3 - x + 3 - 2\ln(x)$ et la fonction polynôme P définie par $P(x) = 3x^3 - x - 2$.
 - (a) Factoriser le polynôme P .
 - (b) En déduire le signe de P sur $\mathbb{R}$.
 - (c) Exprimer g' en fonction de P puis dresser le tableau de variation de g .
 - (d) Montrer que, pour tout $x > 0$, $g(x) > 0$.
3.
 - (a) Vérifier que la dérivée de f peut s'écrire, pour tout $x \in \mathcal{D}_f$, sous la forme : $f'(x) = \frac{g(x)}{x^3}$.
 - (b) En déduire les variations de f . On précisera les limites de f aux bornes de $\mathcal{D}_f$.
 - (c) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur $\mathcal{D}_f$, que l'on notera α .
Vérifier alors que $\frac{1}{2} < \alpha < 1$.
4. (a) Montrer que la droite Δ d'équation $y = x + 1$ est asymptote oblique à $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$.

- (b) On pose, pour tout $x > 0$, $h(x) = x - 1 + \ln(x)$. Étudier les variations de h .
- (c) Calculer $h(1)$. En déduire le signe de $h(x)$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
- (d) En déduire le signe de $f(x) - (x + 1)$, puis la position relative de $\mathcal{C}_f$ et de Δ .

5. Dessiner l'allure de $\mathcal{C}_f$ ainsi que la droite Δ .

Exercice 22 (★★★★)

On considère la fonction définie, pour tout $x \in [0, +\infty[$, par :

$$f(x) = \frac{x}{(x+1)^2}.$$

- 1. (a) Justifier que f est continue et dérivable sur $[0, +\infty[$ et calculer f' .
- (b) Déterminer la limite de f lorsque x tend vers $+\infty$.
- (c) Dresser le tableau de variation de f .

On définit la suite (u_n) par $u_0 = 1$ et la relation : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$.

- 2. (a) Calculer u_1 et u_2 .
- (b) Montrer que, pour tout entier naturel non nul n , on a : $f\left(\frac{1}{n}\right) \leq \frac{1}{n+1}$.
- (c) Établir par récurrence, en utilisant le sens de variation de f , que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 < u_n < \frac{1}{n}.$$

- (d) Montrer que la suite (u_n) converge et donner sa limite.

3. Pour tout entier naturel n , on pose $v_n = \frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n}$.

- (a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = u_n + 2$.
- (b) Montrer que, pour tout entier $n \geq 2$, $\sum_{k=1}^{n-1} v_k = \frac{1}{u_n} - 4$.
- (c) Déduire des deux questions précédentes que, pour tout $n \geq 2$, on a :

$$\frac{1}{u_n} = \sum_{k=1}^{n-1} u_k + 2(n+1).$$

- (d) En utilisant la question 2.(c), en déduire que, pour tout $n \geq 2$, on a :

$$2(n+1) \leq \frac{1}{u_n} \leq 2(n+1) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}.$$

- 4. (a) Montrer que, pour tout $x > -1$, on a : $\ln(1+x) \leq x$.
- (b) En déduire que, pour tout $k \geq 2$, $\ln(k-1) - \ln(k) \leq -\frac{1}{k}$ (on pourra poser $x = -\frac{1}{k}$).
- (c) Montrer alors que, pour $n \geq 3$, on a : $\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} \leq 1 + \ln(n-1)$.

5. En utilisant les questions précédentes, montrer que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} nu_n = \frac{1}{2}$.