

Compléments sur les suites réelles

Relations de comparaison des suites réelles

Exercice 1 (★)

Préciser pour chacune des comparaisons suivantes, au voisinage de $+\infty$, si celle-ci est vraie ou fausse :

$$\begin{array}{llll}
 (1) \ n^2 + e^{-n} = o(n) & (2) \ n - 2 = o(n) & (3) \ \ln(n) = o\left(\frac{1}{n+1}\right) & (4) \ \frac{1}{n^3} = o\left(\frac{1}{\ln(n)}\right) \\
 (5) \ n^2 + n \sim n & (6) \ \frac{e^n}{n+3} \sim e^n & (7) \ \ln(n) + n \sim n & (8) \ \frac{e^n}{n^2+1} \sim \frac{e^n}{n^2}
 \end{array}$$

Exercice 2 (★)

Déterminer si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses.

1. Si $u_n = (2n-1)^3$, alors :

$$(a) \ u_n = o(n^3) \quad (b) \ u_n \sim n^3 \quad (c) \ u_n = o(n^4) \quad (d) \ u_n \sim 8n^3 \quad (e) \ u_n = o\left(\frac{n^4}{2}\right)$$

2. Si $u_n = \frac{2}{n} - \frac{3}{n\sqrt{n}} + \frac{1}{n^2}$, alors :

$$(a) \ u_n \sim \frac{2}{n} \quad (b) \ u_n = o\left(\frac{1}{n}\right) \quad (c) \ u_n = \frac{2}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \quad (d) \ u_n = \frac{2}{n} + o\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)$$

3. Soit (u_n) une suite réelle. Alors :

$$(a) \ u_{n+1} = o(u_n) \quad (b) \ u_{n+1} \sim u_n$$

4. Si $u_n \sim v_n$, alors :

$$\begin{array}{lll}
 (a) \ u_n + 1 \sim v_n + 1 & (b) \ 2u_n \sim v_n & (c) \ -u_n \sim -v_n \\
 (d) \ u_n v_n \sim u_n^2 & (e) \ e^{u_n} \sim e^{v_n} & (f) \ \ln(u_n) \sim \ln(v_n) \\
 (g) \ \lfloor u_n \rfloor \sim \lfloor v_n \rfloor & (h) \ |u_n| \sim |v_n| & (i) \ \sqrt{u_n} \sim \sqrt{v_n}
 \end{array}$$

Exercice 3 (★)

En utilisant la notation $\ll$ (on rappelle que $u_n \ll v_n$ si $u_n = o(v_n)$), classer par négligeabilité les termes généraux qui suivent :

$$(1) \ n, \ n^2, \ \ln(n), \ e^n, \ n \ln(n) \text{ et } \frac{n^2}{\ln(n)}, \quad (2) \ \frac{1}{n}, \ \frac{1}{n^2}, \ \frac{1}{\ln(n)}, \ \frac{\ln(n)}{n}, \ \frac{\ln(n)}{n^2} \text{ et } \frac{1}{n \ln(n)}.$$

Exercice 4 (★)

Déterminer des équivalents simples puis la limite quand n tend vers l'infini des termes suivants :

$$\begin{array}{lll}
 (1) \ \ln(n) + 2n - 1 & (2) \ \frac{(1 + \ln(n))(3n^2 + 1)}{\sqrt{n^2 + 2n}} & (3) \ \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1} \\
 (4) \ \sqrt{n+1} + \sqrt{n-1} & (5) \ \ln(2n^3 + 1) & (6) \ \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{e^{1/n^2} - 1} \\
 (7) \ \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{n} & (8) \ \ln(n+1) - \ln(n-1) & (9) \ (n+1)^n \\
 (10) \ n(\sqrt[3]{2} - 1) & (11) \ \ln\left(\frac{n^2 + 3n + 4}{n^2 - n + 1}\right) & (12) \ \ln(2 - e^{-1/n^2})
 \end{array}$$

Exercice 5 (★)

Calculer les limites quand n tend vers l'infini des termes suivants :

$$\begin{array}{lll}
 (1) \ n \left(\left(1 + \frac{1}{n} \right)^{27} - 1 \right) & (2) \ \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n & (3) \ \left(1 + \frac{1}{n^2} \right)^{n^5} \\
 (4) \ (n+1)(n^{1/n} - 1) & (5) \ \frac{n^3(\ln(n+1) - \ln(n))}{\sqrt{n^3+1}} & (6) \ \frac{n^{2/5}(1 - e^{-1/n})}{7 - 4\ln(n)}
 \end{array}$$

Exercice 6 (★★)

1. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\binom{n}{k} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n^k}{k!}$.

2. En déduire, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\binom{n}{k}}{n^k}$.

Exercice 7 (★★)

1. Soit (u_n) une suite vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 2n^3 - n \ln(n) \leq u_n \leq 2n^3 + n\sqrt{n} + 6.$$

Donner un équivalent simple de u_n au voisinage de $+\infty$.

2. Soit (v_n) une suite vérifiant :

$$\forall n \geq 2, \quad n \ln(n) \leq v_n \leq 2n \ln(n).$$

Donner un équivalent simple de $\ln(v_n)$ au voisinage de $+\infty$.

Exercice 8 (★★)

On définit la suite (u_n) par $u_0 = 1$ et : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 1 + \frac{u_n}{n+1}$.

1. (a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $1 \leq u_n \leq 2$.

(b) Montrer que (u_n) converge vers 1.

2. Déterminer un équivalent de $u_n - 1$, et en déduire un réel a tel que $u_n - 1 = \frac{a}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$.

Exercice 9 (★★★★)

Le but de cet exercice est de démontrer les croissances comparées du cours : $q^n = o(n!)$ et $n! = o(n^n)$.

1. Soit (u_n) une suite de réels positifs telle qu'il existe $\lambda \in]0; 1[$ et $n_0 \in \mathbb{N}$ vérifiant

$$\forall n \geq n_0, \quad u_{n+1} \leq \lambda u_n.$$

Montrer que la suite (u_n) converge vers 0.

2. Soit $q > 1$. On pose, pour tout entier naturel n , $u_n = \frac{q^n}{n!}$.

(a) Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}$.

(b) Justifier qu'il existe un rang n_0 à partir duquel $\frac{u_{n+1}}{u_n} < \frac{1}{2}$.

(c) En déduire que la suite (u_n) converge vers 0.

(d) Conclure.

3. On pose, pour tout entier naturel n , $v_n = \frac{n!}{n^n}$.

(a) Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{v_{n+1}}{v_n}$.

(b) Montrer qu'il existe un rang n_0 à partir duquel $\frac{v_{n+1}}{v_n} < \frac{1}{2}$.

(c) En déduire que la suite (v_n) converge vers 0.

(d) Conclure.

Suites récurrentes d'ordre 1

Exercice 10 (★★)

Soit f la fonction définie par $f(x) = \sqrt{\frac{x}{2-x}}$. On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

- (a) Dresser le tableau de variations de f sur son ensemble I de définition (à déterminer). Préciser le coefficient directeur de la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0, puis au point d'abscisse 1.

(b) Montrer que pour tout $x \in I$, $f(x) \geq x$. Étudier les cas d'égalité.

(c) Tracer $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{D} : y = x$ dans le même repère.
- (a) Démontrer que f réalise une bijection de I dans un ensemble à déterminer.

(b) Expliciter la bijection réciproque f^{-1} de f et dresser son tableau de variations.
- On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = \frac{1}{2}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{\frac{u_n}{2-u_n}}$.

(a) Tracer les premiers termes de la suite (u_n) sur le graphique de la question 1.(c).

(b) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0, 1]$.

(c) Étudier la monotonie de (u_n) .

(d) En déduire que (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

Exercice 11 (★★)

Soit f définie sur $[0, +\infty[$ par $f(x) = x \ln(1+x)$.

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 \in]0, +\infty[$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

- Étudier les variations de f sur $[0, +\infty[$.
- Résoudre l'équation $f(x) = x$, d'inconnue $x \in [0, +\infty[$.
- On suppose dans cette question que $u_0 \in]e-1, +\infty[$.
 - Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $e-1 < u_n \leq u_{n+1}$.
 - En déduire que (u_n) diverge vers $+\infty$.
- On suppose dans cette question que $u_0 \in]0, e-1[$.
 - Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < u_{n+1} \leq u_n < e-1$.
 - Étudier la convergence de (u_n) .

Exercice 12 (★★)

On étudie la suite définie par $u_0 > 0$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = -u_n \ln(u_n)$.

1. Étudier la fonction f définie par : $f(x) = -x \ln(x)$.
Vérifier que l'intervalle $I =]0, \frac{1}{e}[$ est stable par f .
 2. Cas $u_0 \geq 1$: La suite est-elle bien définie ?
 3. Cas $u_0 = \frac{1}{e}$: Calculer u_1 . Que peut-on dire de la suite ?
 4. Cas $u_0 \in]0, \frac{1}{e}[$:
 - (a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in]0, \frac{1}{e}[$.
 - (b) Comparer u_0 et u_1 . Montrer que la suite (u_n) est croissante.
 - (c) Prouver que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.
 5. Cas $u_0 \in]\frac{1}{e}, 1[$: Encadrer u_1 . Conclure quant à la convergence de (u_n) .
-

Exercice 13 (★★)

Soit (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{5 + 4u_n}$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est bien défini et $1 \leq u_n \leq 5$.
 2. Déterminer la seule limite finie possible de (u_n) .
 3. (a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - 5| \leq \frac{2}{3}|u_n - 5|$.
 (b) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - 5| \leq 4 \left(\frac{2}{3}\right)^n$.
 (c) En déduire que (u_n) converge et déterminer sa limite.
-

Exercice 14 (★★)

Dans tout cet exercice, f désigne la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f(x) = x - \ln(x)$$

1. Étude de la fonction f :
 - (a) Dresser le tableau de variation de f en précisant ses limites en 0 et en $+\infty$.
 - (b) Montrer que l'équation $f(x) = 2$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}_+^*$, admet exactement deux solutions, que l'on note a et b , telles que $0 < a < 1 < b$.
 - (c) Montrer que $b \in [2, 4]$. On rappelle que $\ln(2) \simeq 0,7$.

2. Étude d'une suite :

On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = 4$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \ln(u_n) + 2$.

- (a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est bien défini et $u_n \geq b$.
 - (b) Déterminer la monotonie de la suite (u_n) . En déduire qu'elle converge et préciser sa limite.
 - (c) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - b \leq \frac{1}{2}(u_n - b)$.
 - (d) En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n - b \leq \frac{1}{2^{n-1}}$. Retrouver $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.
-

Exercice 15 (★★)

Dans cet exercice, on cherche à résoudre numériquement l'équation (E) suivante d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

$$(E) : x^3 + x^2 + x - 1 = 0.$$

1. (a) Montrer que l'équation (E) a une seule solution dans $\mathbb{R}$ qu'on notera α .
 (b) Montrer que $\alpha \in [1/3, 1]$.

2. On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + x + 1}.$$

- (a) Montrer que α est l'unique solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation $f(x) = x$.
- (b) Montrer que, si x appartient à $[1/3, 1]$, alors $f(x)$ appartient à $[1/3, 1]$.
Pour cela, on pourra commencer par étudier les variations de f sur $[1/3, 1]$.
- (c) Montrer que, pour tout $x \in [1/3, 1]$, $|f'(x)| \leq \frac{135}{169}$.
Pour cela, on pourra commencer par étudier les variations de f' sur $[1/3, 1]$.

3. On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par : $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$.

- (a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [1/3, 1]$.
- (b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{135}{169} |u_n - \alpha|.$$

- (c) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{135}{169}\right)^n.$$

- (d) En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

Exercice 16 (★★★★)

Soit (u_n) la suite définie par : $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 1 + \frac{6}{u_n}$.

1. (a) Étudier les variations de la fonction $f(x) = 1 + \frac{6}{x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$, puis tracer sa courbe représentative $\mathcal{C}_f$ et la droite $\mathcal{D} : y = x$ dans un même repère.
 (b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est bien défini et $u_n > 0$.
 (c) Tracer les premiers termes de la suite (u_n) sur le graphique de la question 1.
 Est-ce que (u_n) est monotone ?
2. On pose $v_n = u_{2n}$ et $w_n = u_{2n+1}$.
 (a) Montrer que $v_{n+1} = f \circ f(v_n)$ et que $w_{n+1} = f \circ f(w_n)$.
 (b) Montrer que (v_n) est croissante et (w_n) est décroissante.
 (c) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n \leq 3$.
 En déduire que (v_n) converge et déterminer sa limite.
 (d) Montrer que (w_n) converge également et déterminer sa limite.
3. En déduire que la suite (u_n) converge.

Exercice 17 (★★★)

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = \frac{1}{2}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = (1 - u_n)^2$.

On note f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (1 - x)^2$.

1. (a) Étudier les variations de la fonction f .
 (b) Vérifier que l'intervalle $[0, 1]$ est stable par f .
 (c) Déterminer les points fixes de la fonction f .
 (d) Préciser le sens de variation de la fonction $g = f \circ f$ sur $[0, 1]$.
 2. La suite (u_n) est-elle monotone ?
 3. (a) Démontrer que (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones. Préciser leur monotonie.
 (b) Justifier que les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont convergentes. On note respectivement ℓ_1 et ℓ_2 les limites des suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) .
 (c) Déterminer ℓ_1 et ℓ_2 .
 (d) La suite (u_n) est-elle convergente ?
-

Suites implicites**Exercice 18 (★★)**

Soit f définie sur $[0, +\infty[$ par $f(x) = x \ln(1 + x)$.

1. Justifier que f réalise une bijection de $[0, +\infty[$ sur un ensemble que l'on déterminera.
2. On considère à présent pour tout n entier naturel non nul l'équation :

$$(E_n) \quad f(x) = \frac{1}{n^2}.$$

- (a) Montrer que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation (E_n) a une unique solution strictement positive. On la notera α_n .
 - (b) Montrer que : $\forall n \geq 1, \alpha_n \geq \frac{1}{n^2}$.
 - (c) Montrer que la suite (α_n) est décroissante et convergente.
 - (d) Déterminer la limite de la suite (α_n) puis montrer que $\alpha_n \sim \frac{1}{n}$.
-

Exercice 19 (★★)

On considère la fonction $f(x) = e^x - x$.

1. (a) Étudier les variations de f . On précisera les limites en $\pm\infty$.
 (b) Montrer que la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de f admet la droite Δ d'équation $y = -x$ comme asymptote oblique en $-\infty$. Étudier la position relative de $\mathcal{C}_f$ par rapport à Δ .
 (c) Tracer $\mathcal{C}_f$ dans un repère orthonormé.
2. Montrer que pour tout $n \geq 2$, l'équation $f(x) = n$ possède exactement deux solutions de signes contraires.
 On notera α_n la solution positive de cette équation et β_n la solution négative.
3. (a) Étudier les variations de la suite $(\alpha_n)_{n \geq 2}$.
 (b) Démontrer que, pour tout entier $n \geq 2$, $\alpha_n \geq \ln(n)$.
 (c) En déduire le comportement asymptotique de la suite $(\alpha_n)_{n \geq 2}$.

4. (a) Étudier les variations de la suite $(\beta_n)_{n \geq 2}$.
 - (b) Montrer que, pour tout entier $n \geq 2$, $-n \leq \beta_n \leq -n + 1$.
 - (c) En déduire que : $\beta_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -n$.
-

Exercice 20 (★★)

On considère la fonction $f(x) = e^x + x$.

1. Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle à expliciter.
 2. Justifier que pour tout entier naturel n , l'équation $f(x) = n$ possède une unique solution que l'on notera par la suite x_n .
 3. Déterminer la monotonie et la limite de la suite (x_n) .
 4. Montrer que, pour tout entier $n \geq 1$, $x_n \leq \ln(n)$.
En déduire que : $\forall n \geq 1, \ln(n - \ln(n)) \leq x_n$.
 5. En déduire un équivalent de x_n en $+\infty$.
-

Exercice 21 (★★)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On définit la fonction réelle f_n par : $\forall x \in \mathbb{R}, f_n(x) = x + 1 - \frac{e^x}{n}$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un unique nombre réel négatif x_n tel que $f_n(x_n) = 0$.
 2. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, x_n > -1$.
 3. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_-, f_{n+1}(x) > f_n(x)$.
 4. En déduire que la suite (x_n) est décroissante et convergente.
 5. Calculer la limite ℓ de la suite (x_n) .
-

Exercice 22 (★★)

Pour tout entier naturel non nul n , on note f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_n(x) = x^n + 2x - 2$.

1. (a) Déterminer les variations de f_n sur $\mathbb{R}_+$.
(b) En déduire que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution α_n dans $\mathbb{R}_+$.
2. Quelles sont les valeurs de α_1 et α_2 ?
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*, \alpha_n \in [0, 1]$.
4. Soit n un entier naturel non nul.
(a) Étudier le signe de $f_{n+1}(x) - f_n(x)$ pour tout $x \in [0, 1]$.
(b) En déduire la monotonie de la suite (α_n) .
5. Montrer que la suite (α_n) converge vers un réel $\ell \in [0, 1]$ (qu'on ne cherchera pas à déterminer).
6. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*, \alpha_n = \frac{2 - (\alpha_n)^n}{2}$.
7. On suppose que la limite ℓ est différente de 1.
(a) Justifier que pour tout entier naturel non nul n , on a : $0 \leq \alpha_n \leq \ell$.

(b) Que vaut alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\alpha_n)^n$?

(c) En déduire la limite de la suite (α_n) , constater une contradiction puis conclure.

Exercice 23 (★★)

Pour tout entier n supérieur ou égal à 1, on définit la fonction f_n par :

$$f_n(x) = x^n + 9x^2 - 4.$$

- Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ n'admet qu'une seule solution positive, notée u_n .
- Calculer u_1 et u_2 .
- Vérifier que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n \in]0, \frac{2}{3}[$.
- Montrer que, pour tout $x \in]0, 1[$, on a : $f_{n+1}(x) < f_n(x)$.
 - En déduire la monotonie et la convergence de la suite (u_n) . On note ℓ sa limite.
- Encadrer $(u_n)^n$ puis déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n^n$.
 - En déduire la limite de $(4 - 9u_n^2)$ puis expliciter ℓ .

Exercice 24 (★★)

On désigne par n un entier supérieur ou égal à 3. On note f_n la fonction définie par :

$$f_n(x) = x - n \ln(x).$$

- Étudier les variations de f_n .
- En déduire que, pour tout entier $n \geq 3$, l'équation $f_n(x) = 0$ admet exactement deux solutions u_n et v_n vérifiant : $0 < u_n < n < v_n$.
- Quelle est la nature de la suite $(v_n)_{n \geq 3}$?
- Montrer que : $\forall n \geq 3, 1 < u_n < e$.
 - Montrer que $f_n(u_{n+1}) = \ln(u_{n+1})$, puis que (u_n) est décroissante.
 - Montrer que : $\forall n \geq 3, e^{1/n} < u_n < e^{e/n}$. En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

Exercice 25 (★★)

Pour tout entier naturel n non nul, on considère $f_n(x) = \frac{1}{1+e^x} + nx$. On note $\mathcal{C}_n$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

- Déterminer, pour tout réel x , $f'_n(x)$ et $f''_n(x)$.
 - En déduire que la fonction f_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
- Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f_n(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x)$.
 - Montrer que les droites Δ_n et Δ'_n d'équations $y = nx$ et $y = nx + 1$ sont asymptotes à $\mathcal{C}_n$.
 - Déterminer les coordonnées du seul point d'inflexion, noté A_n , de $\mathcal{C}_n$.
 - Donner l'équation de la tangente T_1 à la courbe $\mathcal{C}_1$ en A_1 puis tracer Δ_1, Δ'_1 et T_1 ainsi que l'allure de la courbe $\mathcal{C}_1$.
- Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ possède une seule solution sur $\mathbb{R}$, notée u_n .
 - Montrer que l'on a : $\forall n \in \mathbb{N}^*, -\frac{1}{n} < u_n < 0$.
 - En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$, puis montrer que $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{1}{2n}$.