

Intégration

Intégration sur un segment

Exercice 1 (★)

Calculer les intégrales suivantes :

$$\begin{array}{llll}
 A = \int_1^4 \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x\sqrt{x}} \right) dx & B = \int_0^1 2x^4 e^{-x^5} dx & C = \int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{1+4x}} & D = \int_0^5 \sqrt{3x+1} dx \\
 E = \int_0^1 \frac{x^2}{5+x^3} dx & F = \int_{1/2}^1 \frac{e^{1/x}}{x^2} dx & G = \int_1^2 \frac{x^2}{\sqrt{1+x^3}} dx & H = \int_{-1}^1 |x| dx \\
 I = \int_e^{e^2} \frac{dx}{x\sqrt{\ln(x)}} & J = \int_0^1 \frac{x^2}{(3+2x^3)^2} dx & K = \int_0^4 |x-2| dx & L = \int_{-1}^1 2^x dx
 \end{array}$$

Exercice 2 (★)

Calculer à l'aide d'une intégration par parties les intégrales suivantes :

$$\begin{array}{llll}
 A = \int_{1/2}^1 \frac{e^{1/x}}{x^3} dx & B = \int_1^e x(\ln(x))^2 dx & C = \int_2^3 \ln(x) dx & D = \int_{-1}^1 x^2 e^x dx \\
 E = \int_0^1 x^3 e^{x^2} dx & F = \int_0^1 \frac{x^3}{(1+x^2)^2} dx & G = \int_{-1}^1 x 2^x dx & H = \int_1^2 \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) dx
 \end{array}$$

Exercice 3 (★)

Soit les intégrales $I = \int_0^1 \frac{x-1}{1+x^3} dx$ et $J = \int_0^1 \frac{x^4 - 2x^3}{(1+x^3)^2} dx$.

1. Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que : $I = -\frac{1}{4} + \frac{3}{2}J$.
 2. Déterminer les constantes réelles a, b, c telles que : $\forall x \neq -1, \frac{x-1}{1+x^3} = \frac{a}{x+1} + \frac{bx+c}{x^2-x+1}$.
 3. En déduire la valeur de I puis celle de J .
-

Exercice 4 (★)

Calculer les intégrales suivantes à l'aide du changement de variable indiqué :

$$\begin{array}{lll}
 A = \int_1^2 \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}} dx \quad (u = \sqrt{x}) & B = \int_0^1 \frac{1}{e^x+1} dx \quad (u = e^x) & C = \int_0^{\ln(2)} \frac{\ln(1+e^x)}{1+e^{-x}} dx \quad (u = 1+e^x) \\
 D = \int_1^4 e^{\sqrt{x}} dx \quad (u = e^{\sqrt{x}}) & E = \int_1^2 \frac{dx}{x+\sqrt{x}} \quad (u = \sqrt{x}) & F = \int_1^2 \frac{dx}{x(x^2+1)} \quad (u = x^2+1)
 \end{array}$$

Exercice 5 (★)

Calculer l'intégrale $\int_{1/2}^2 \frac{\ln(x)}{x} dx$ en utilisant chacune des trois méthodes suivantes :

1. en déterminant une primitive directement,
2. par intégration par parties,
3. avec le changement de variable $u = \frac{1}{x}$.

Exercice 6 (★★)

Pour tout entier naturel n , on définit l'intégrale : $I_n = \int_1^e x^2 (\ln(x))^n dx$.

1. Calculer I_1 .
2. (a) Étudier le sens de variation de la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
 (b) Montrer que la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente.
 (c) Montrer que : $\forall x \in [1, e], \ln(x) \leq \frac{x}{e}$.
 (d) En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$.
3. (a) En utilisant une intégration par parties, montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, I_{n+1} = \frac{e^3}{3} - \frac{n+1}{3} I_n$.
 (b) En déduire un équivalent de I_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 7 (★★)

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^1 \frac{x^{2n+1}}{1+x^2} dx$.

1. (a) Calculer I_0 .
 (b) Calculer $I_0 + I_1$ puis en déduire I_1 .
2. (a) Montrer que : $I_{n+1} + I_n = \frac{1}{2n+2}$.
 (b) En déduire que : $I_n \leq \frac{1}{2n+2}$.
 (c) Montrer que la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente et calculer sa limite.
3. (a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $2(-1)^{n-1} I_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} - \ln(2)$.
 (b) En déduire que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ converge et déterminer sa somme.
4. (a) Montrer que : $I_n = \frac{1}{4(n+1)} + \frac{1}{n+1} \int_0^1 \frac{x^{2n+3}}{(1+x^2)^2} dx$.
 (b) Établir les inégalités : $0 \leq \int_0^1 \frac{x^{2n+3}}{(1+x^2)^2} dx \leq \frac{1}{2n+4}$.
 (c) En déduire un équivalent de I_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 8 (★★)

Soit x un réel positif. On pose $I_n = \frac{1}{n!} \int_0^x (x-t)^n e^t dt$.

1. (a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq I_n \leq \frac{x^n}{n!} e^x$.
 (b) Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$.
2. (a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, I_n = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + I_{n+1}$.
 (b) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}, I_n = e^x - \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}$.
 (c) En déduire que la série $\sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!}$ est convergente et déterminer sa somme.

Exercice 9 (★★)

Pour tout couple (p, q) d'entiers naturels, on pose $I(p, q) = \int_0^1 x^p (1-x)^q dx$.

1. Montrer que : $\forall (p, q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}, I(p, q) = I(q, p)$.
 2. Montrer par intégration par parties que : $\forall (p, q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*, I(p, q) = \frac{q}{p+1} I(p+1, q-1)$.
 3. En déduire que : $\forall (p, q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}, I(p, q) = \frac{p!q!}{(p+q)!} I(p+q, 0)$.
 4. Déterminer $I(p+q, 0)$ et montrer finalement que : $\forall (p, q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}, I(p, q) = \frac{p!q!}{(p+q+1)!}$.
-

Exercice 10 (★★)

On considère la fonction $f(x) = x \ln(x)$ et, pour tout entier $n \geq 2$, on pose $S_n = \sum_{k=1}^n f(k)$.

1. Montrer que : $\forall k \in \mathbb{N}^*, f(k) \leq \int_k^{k+1} f(x) dx \leq f(k+1)$.
 2. En sommant les inégalités, montrer que : $\forall n \geq 2, S_n - n \ln(n) \leq \int_1^n f(x) dx \leq S_n$.
 3. En déduire un encadrement de S_n .
 4. Calculer $\int_1^n f(x) dx$.
 5. Déterminer un équivalent de S_n .
-

Exercice 11 (★★)

On rappelle que la notation $\sqrt[n]{x}$ désigne la racine n -ième de x définie pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ par $\sqrt[n]{x} = x^{1/n}$. La fonction $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ est la bijection réciproque de la fonction $x \mapsto x^n$ sur \mathbb{R}_+^* . Par exemple,

$$\sqrt[3]{27} = 27^{1/3} = 3 \text{ car } 3^3 = 27 \text{ et } \sqrt[4]{16} = 16^{1/4} = 2 \text{ car } 2^4 = 16.$$

Pour tout entier $n \geq 2$, on pose : $u_n = \sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}}$.

1. Montrer que : $\ln(u_n) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln\left(\frac{k}{n}\right)$.
 2. Montrer que, pour tout $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$: $\frac{1}{n} \ln\left(\frac{k}{n}\right) \leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \ln(x) dx \leq \frac{1}{n} \ln\left(\frac{k+1}{n}\right)$.
 3. En déduire que, pour tout entier $n \geq 2$: $\ln(u_n) \leq \int_{\frac{1}{n}}^1 \ln(x) dx \leq \ln(u_n) - \frac{1}{n} \ln\left(\frac{1}{n}\right)$.
 4. Calculer $\int_{\frac{1}{n}}^1 \ln(x) dx$.
 5. En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(u_n)$ puis $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.
-

Exercice 12 (★★)

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sqrt[n]{2^k}$.

1. Montrer que pour tout $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, $\frac{1}{n} \sqrt[n]{2^k} \leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} 2^t dt \leq \frac{1}{n} \sqrt[n]{2^{k+1}}$.
 2. En déduire un encadrement de u_n .
 3. Obtenir la limite de u_n .
 4. Retrouver cette limite en calculant u_n en fonction de n .
-

Exercice 13 (★★)

1. Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I , à valeurs dans un intervalle J et soit f une fonction continue sur J .

En utilisant une primitive F de f sur J , prouver que $\varphi : x \mapsto \int_{u(x)}^{v(x)} f(t) dt$ est dérivable sur I et calculer sa dérivée.

2. Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer l'ensemble de définition, justifier qu'elle est dérivable sur celui-ci et calculer sa dérivée :

$$\varphi_1(x) = \int_0^x e^{t^2} dt, \quad \varphi_2(x) = \int_1^{x^2} \frac{dt}{1+t^2}, \quad \varphi_3(x) = \int_x^{2x} \ln(t) dt, \quad \varphi_4(x) = \int_{x^2}^{x^3} \frac{dt}{1+e^t}$$

Exercice 14 (★★)

On considère la fonction $\varphi(x) = \int_x^{x^2} \frac{dt}{t \ln(t)}$.

1. Montrer que φ est définie sur $\mathcal{D} =]0, 1[\cup]1, +\infty[$.
 2. Montrer que φ est dérivable et calculer $\varphi'(x)$. Que peut-on en conclure ?
 3. Vérifier ce résultat en calculant $\varphi(x)$ directement.
-

Exercice 15 (★★)

On considère la fonction $\varphi(x) = \int_{1/x}^x \frac{\ln(t)}{1+t^2} dt$.

1. Déterminer l'ensemble de définition \mathcal{D} de φ .
 2. Justifier que φ est dérivable sur \mathcal{D} .
 3. Calculer $\varphi'(x)$ et $\varphi(1)$. En déduire $\varphi(x)$ pour tout $x \in \mathcal{D}$.
 4. Retrouver ce résultat en posant le changement de variable $u = \frac{1}{t}$.
-

Exercice 16 (★★)

On considère la fonction φ définie par $\varphi(x) = \int_x^{x^3} \frac{dt}{t^4 + 1}$.

1. Montrer que φ est définie sur \mathbb{R} .
2. Établir que φ est impaire.

3. Étudier le signe de φ sur \mathbb{R} .
4. Justifier que φ est dérivable sur \mathbb{R} et calculer $\varphi'(x)$.

Exercice 17 (★★)

Pour tout $x \neq 0$, on pose $\varphi(x) = \int_x^{2x} \frac{1}{\ln(1+t^2)} dt$.

1. Justifier que φ est bien définie sur \mathbb{R}^* .
2. Étudier la parité de φ .
3. Étudier le signe de φ sur \mathbb{R}^* .
4. Justifier que φ est dérivable sur \mathbb{R}_+^* et calculer $\varphi'(x)$.
5. En déduire les variations de φ sur \mathbb{R}_+^* .
6. Montrer que : $\forall x > 0, \varphi(x) \geq \frac{x}{\ln(1+4x^2)}$. En déduire la limite en $+\infty$ de $\varphi(x)$.

Exercice 18 (★★)

On définit la fonction φ sur $[0, 1]$ par :

$$\varphi(0) = 0, \quad \varphi(1) = \ln(2) \quad \text{et} \quad \forall x \in]0, 1[, \varphi(x) = \int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln(t)}.$$

1. Montrer que φ est bien définie sur $[0, 1]$.
2. (a) Pour tout réel $x \in]0, 1[$, calculer $\int_x^{x^2} \frac{dt}{t \ln(t)}$.
 (b) Établir que, pour tout réel $x \in]0, 1[$, on a : $x^2 \ln(2) \leq \varphi(x) \leq x \ln(2)$.
 (c) En déduire que φ est continue sur $[0, 1]$.
3. Justifier que φ est dérivable sur $]0, 1[$, puis déterminer ses variations.

Intégrales généralisées

Exercice 19 (★)

Vérifier si les intégrales généraliser suivantes sont convergentes et, le cas échéant, les calculer :

$$\begin{aligned} A &= \int_3^{+\infty} \frac{dt}{t\sqrt{t}} & B &= \int_2^{+\infty} \frac{dt}{t \ln(t)} & C &= \int_0^{+\infty} \frac{t}{(1+t^2)^2} dt & D &= \int_0^{+\infty} te^{-t^2} dt \\ E &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^t}{(1+e^t)^3} dt & F &= \int_3^{+\infty} \frac{dt}{t(\ln(t))^2} & G &= \int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t} dt & H &= \int_1^{+\infty} \frac{e^t}{1+e^t} dt \end{aligned}$$

Exercice 20 (★)

Montrer que les intégrales généraliser suivantes sont convergentes et déterminer leur valeur à l'aide d'une intégration par parties :

$$A = \int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t^2} dt \quad B = \int_0^{+\infty} te^{-t} dt \quad C = \int_0^{+\infty} \frac{t^3}{(1+t^2)^3} dt \quad D = \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^3} e^{-1/t} dt$$

Exercice 21 (★)

Déterminer la nature des intégrales suivantes et préciser leur valeur en cas de convergence :

$$A = \int_1^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{t}}}{\sqrt{t}} dt \quad B = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{1+e^t}} \quad C = \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t\sqrt{t^2+1}}$$

On utilisera le changement de variable $u = \sqrt{t}$ pour A , $u = \sqrt{1+e^t}$ pour B , $u = \sqrt{t^2+1}$ pour C .

Exercice 22 (★★)

Déterminer la nature des intégrales suivantes :

$$\begin{aligned} A &= \int_0^{+\infty} \frac{t^3}{2t^5+1} dt & B &= \int_1^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{t}}\right) dt & C &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{t^2+1} & D &= \int_1^{+\infty} \frac{e^{1/t}-1}{t^2} dt \\ E &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt & F &= \int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t+\ln(t)} dt & G &= \int_2^{+\infty} \frac{dt}{t^3 \ln(t)} & H &= \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt \\ I &= \int_2^{+\infty} \frac{t^2}{2t^2} dt & J &= \int_1^{+\infty} e^{-t} \ln(t) dt & K &= \int_3^{+\infty} \frac{dt}{t\sqrt{t-2}} & L &= \int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t^2+1} dt \end{aligned}$$

Exercice 23 (★)

On considère la fonction $f : [4, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(t) = \frac{10}{t(t-2)(2t-5)}$.

1. Montrer que l'intégrale $\int_4^{+\infty} f(t) dt$ converge.
 2. Trouver trois réels a, b, c tels que : $\forall t \in [4, +\infty[, f(t) = \frac{a}{t} + \frac{b}{t-2} + \frac{c}{2t-5}$.
 3. Calculer $\int_4^{+\infty} f(t) dt$.
-

Exercice 24 (★★)

1. Montrer que $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t^3 \ln(t)}{(1+t^2)^2} = 0$.
 2. En déduire que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{t \ln(t)}{(1+t^2)^2} dt$ est convergente.
 3. Trouver les réels a, b et c tels que : $\forall t \geq 1, \frac{1}{t(1+t^2)} = \frac{a}{t} + \frac{bt+c}{1+t^2}$.
 4. En déduire la valeur l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{t \ln(t)}{(1+t^2)^2} dt$.
-

Exercice 25 (★)

1. Étudier la parité de la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(t) = \frac{t}{(1+t^2)^2}$.
 2. Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{t dt}{(1+t^2)^2}$ converge et déterminer sa valeur.
 3. En déduire la convergence et la valeur de $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t dt}{(1+t^2)^2}$.
-

Exercice 26 (★★)

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par : $f(t) = \frac{e^t}{(e^t + 1)^2}$.

1. (a) Montrer la convergence et calculer la valeur de $\int_0^{+\infty} f(t)dt$
 - (b) Montrer que la fonction f est paire.
 - (c) En déduire la convergence et la valeur de $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$.
 2. (a) Déterminer $\lim_{t \rightarrow +\infty} t^3 f(t)$.
 - (b) En déduire la convergence de $\int_0^{+\infty} t f(t)dt$.
 - (c) Justifier l'existence et donner la valeur de $\int_{-\infty}^{+\infty} t f(t)dt$.
-

Exercice 27

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par : $f(t) = \frac{2t}{e^t + e^{-t}}$.

1. Montrer que f est impaire.
 2. Justifier que $\int_0^{+\infty} t e^{-t} dt$ converge.
 3. Montrer que $f(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} 2te^{-t}$.
 4. Déduire des questions précédentes que $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = 0$.
-

Exercice 28 (★★)

Pour tout entier naturel n et pour tout réel $A \geq 0$, on pose :

$$I_n(A) = \int_0^A x^n e^{-x} dx \quad \text{et} \quad J_n = \int_0^{+\infty} x^n e^{-x} dx.$$

1. (a) Calculer $I_0(A)$.
 - (b) En déduire que J_0 est convergente et donner sa valeur.
 - (c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, donner une relation entre $I_{n+1}(A)$ et $I_n(A)$.
 2. (a) Déduire des questions précédentes que J_n est convergente (on pourra effectuer une récurrence).
 - (b) Quelle relation lie J_{n+1} et J_n ?
 - (c) En déduire la valeur de J_n en fonction de n .
 3. A l'aide d'un changement de variable, montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} x^n e^{-2x} dx$ est convergente et donner sa valeur.
-

Exercice 29 (★★)

On considère un entier naturel n .

1. (a) Justifier que l'on a : $\frac{(\ln(t))^n}{t^3} \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$.
 (b) En déduire la convergence de l'intégrale $I_n = \int_1^{+\infty} \frac{(\ln(t))^n}{t^3} dt$.
 2. (a) Calculer I_0 .
 (b) Trouver une relation entre I_{n+1} et I_n .
 (c) En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}, I_n = \frac{n!}{2^{n+1}}$.
-

Exercice 30 (★★)

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit la fonction $g_n : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ par : $g_n(x) = \frac{(\ln(1+x))^n}{(1+x)^2}$.

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$: $I_n = \int_0^{+\infty} g_n(t) dt$.

1. Montrer que l'intégrale I_0 est convergente et la calculer.
 2. (a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $g_n(x) \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right)$.
 (b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'intégrale I_n converge.
 3. (a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, I_{n+1} = (n+1)I_n$.
 (b) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}, I_n = n!$.
-

Exercice 31 (★★★)

On pose, lorsque c'est possible, $f(x) = \int_1^{+\infty} \frac{1}{1+t+t^{x+1}} dt$.

1. Montrer que la fonction f est définie sur \mathbb{R}_+^* .
 2. Montrer que la fonction f est décroissante sur \mathbb{R}_+^* .
 3. Justifier l'existence de $g(x)$ définie sur \mathbb{R}_+^* par $g(x) = \int_1^{+\infty} \frac{1}{t(1+t^x)} dt$.
 4. Pour tout $x > 0$ et pour tout $t \geq 1$, simplifier $\frac{1}{t} - \frac{t^{x-1}}{1+t^x}$ puis établir que $\forall x > 0, g(x) = \frac{\ln(2)}{x}$.
 5. En déduire que, pour tout $x > 0, 0 \leq f(x) \leq \frac{\ln(2)}{x}$ puis déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
 6. Montrer que : $\forall x > 0, 0 \leq \frac{\ln(2)}{x} - f(x) \leq \frac{1}{2x+1}$.
 7. En déduire la limite de $f(x)$ quand x tend vers 0 par valeurs positives ainsi qu'un équivalent de $f(x)$ lorsque x est au voisinage de 0^+ .
-