TD 11

Variables aléatoires à densité

Exercice 1 (★)

1. Montrer que la fonction f suivante peut être considérée comme une densité de probabilité d'une variable aléatoire X :
$$f(x) = \begin{cases} |x| & \text{si } x \in [-1,1], \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

2. Déterminer la fonction de répartition de X.

3. Montrer que X possède une espérance et la déterminer.

4. Montrer que X possède une variance et la déterminer.

Exercice 2 (★)

1. Montrer que la fonction f suivante est une densité de probabilité :
$$f(x) = \begin{cases} 6x(1-x) & \text{si } 0 \leq x \leq 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

2. On note Y la variable aléatoire réelle dont f est une densité.

   Que vaut $Y(\Omega)$? Déterminer la fonction de répartition de Y.

3. Calculer $P(Y \leq \frac{1}{3})$, $P(\frac{1}{4} \leq Y \leq 2)$, $P(Y \geq \frac{2}{3})$, $P(|Y| \leq \frac{1}{2})$ et $P(|Y| \leq 2)$.

4. Montrer que Y admet une espérance et une variance et les calculer.

Exercice 3 (★★)

1. Déterminer $a \in \mathbb{R}$ tel que :
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{a}{x^3} & \text{si } x \geq 1, \\ 0 & \text{si } x < 1, \end{cases}$$
soit une densité d'une variable aléatoire X.

2. Déterminer la fonction de répartition de X.

3. Calculer $P(-1 < X < 3)$, $P(X > 2)$ et $P(|X| \leq 1)$.

4. Montrer que X admet une espérance (et la calculer), mais pas de variance.

Exercice 4 (★★)

On considère la fonction f définie par :
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2e^x}{(1+e^x)^2} & \text{si } x \geq 0, \\ 0 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

1. Montrer que f est une densité de probabilité.

2. Soit X une variable aléatoire à densité dont f est une densité.

   Déterminer la fonction de répartition F_X de X.

3. Calculer les probabilités suivantes :

$$P(X \geq \ln(2)), \qquad P(\ln(2) \leq X \leq \ln(8)), \qquad P_{(X \geq \ln(2))}(X \leq \ln(8)).$$

   On donnera les résultats sous la forme de fractions irréductibles.

4. Déterminer la médiane de X, c'est-à-dire la valeur de x pour laquelle $F_X(x) = \dfrac{1}{2}$.

5. Établir que X possède une espérance et donner la valeur de $E(X)$.

Exercice 5 (★★)

1. (a) Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{x(x+1)} dx$ converge et déterminer sa valeur.

   (b) Soit g la fonction définie par :

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1, \\ \dfrac{k}{x(x+1)} & \text{si } x \geq 1. \end{cases}$$

   Déterminer k pour que g soit une densité.

2. On note Y la variable aléatoire de densité g.

   (a) Étudier l'existence de l'espérance de Y.

   (b) Déterminer la fonction de répartition F_Y de Y.

   (c) Déterminer la médiane de Y, c'est-à-dire la valeur de x pour laquelle $F_Y(x) = \dfrac{1}{2}$.

Exercice 6 (★)

1. Soit X une variable aléatoire admettant pour fonction de répartition :

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ 1 - e^{-x^2} & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

   Montrer que X est une variable aléatoire à densité et déterminer une densité de X.

2. Soit Y une variable aléatoire admettant pour fonction de répartition :

$$F_Y(x) = \frac{1}{1 + e^{-x}}.$$

   Montrer que Y est une variable aléatoire à densité et déterminer une densité de Y.

Exercice 7 (★★)

Soit X une variable aléatoire à densité admettant une densité f_X. On pose :

$$Y = -2X + 3, \qquad Z = e^X, \qquad U = X^2, \qquad V = \sqrt{X} \text{ (où } X(\Omega) \subset \mathbb{R}_+).$$

Pour chacune de ces variables aléatoires :

1. Montrer qu'elle est à densité.

2. Obtenir une densité qu'on exprimera en fonction de f_X.

Exercice 8 (★)

1. Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$.

   Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x^n} dx$ converge et donner sa valeur en fonction de n.

2. On note f la fonction définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 9\dfrac{\ln(x)}{x^4} & \text{si } x \geq 1, \\ 0 & \text{si } x < 1. \end{cases}$$

   Montrer que f est une densité de probabilité.

3. On considère la variable aléatoire X définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ et admettant f comme densité. Montrer que X possède une espérance et une variance et donner leurs valeurs.

4. On pose $Y = \dfrac{1}{X}$ et on admet que Y est une variable aléatoire définie aussi sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$.
   Sans chercher à connaître la loi de Y, montrer que Y possède une espérance et une variance et donner leurs valeurs.

Exercice 9 (★★)

1. (a) Montre que la fonction f suivante est une densité de probabilité :

$$f(x) = \begin{cases} e^{-|x|} & \text{si } -\ln(2) \leq x \leq \ln(2), \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

   (b) Soit X une variable aléatoire admettant f comme densité. Déterminer la fonction de répartition F de X.

2. On pose $Y = |X|$.

   (a) Déterminer la fonction de répartition G de Y.

   (b) Montrer que Y est une variable aléatoire à densité et déterminer une densité g de Y.

Exercice 10 (★★)

1. Soit f la fonction définie pour tout réel x par :

$$f(x) = e^{-x} \ln(1 + e^x).$$

   (a) Pour tout réel x, calculer $f'(x)$.

   (b) Vérifier que, pour tout réel x, on a : $f(x) = 1 - f'(x) - \dfrac{e^x}{1 + e^x}$.

   (c) En déduire que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\, dx$ est convergente et donner sa valeur.

2. (a) Soit α un réel et g la fonction définie par :

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ \alpha f(x) & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

   Déterminer α pour que g puisse être considérée comme densité d'une variable aléatoire X.

   (b) La variable aléatoire $Y = e^X$ admet-elle une espérance ?

Exercice 11 (★★★)

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$f_n(x) = \begin{cases} nx^{n-1} & \text{si } x \in [0,1], \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Montrer que f_n est une densité de probabilité.
2. On considère une variable aléatoire X_n dont une densité de probabilité est f_n. On dit alors que X_n suit une loi monôme d'ordre n.
   (a) Déterminer la fonction de répartition F_n de X_n.
   (b) Déterminer $E(X_n)$.
3. On considère U_n et V_n deux variables aléatoires définies sur une même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ suivant la loi monôme d'ordre n ($n \geq 2$) et indépendantes.

   On note $M_n = \max(U_n, V_n)$ et $T_n = \min(U_n, V_n)$ et on admet que M_n et T_n sont des variables aléatoires définies, elles aussi, sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$.
   (a) Déterminer la fonction de répartition de M_n.
   (b) En déduire que M_n suit une loi monôme dont on donnera l'ordre et donner $E(M_n)$.
   (c) Exprimer $M_n + T_n$ en fonction de U_n et V_n.
   (d) En déduire, sans calcul d'intégrale, la valeur de $E(T_n)$.

Exercice 12 (★★★)

1. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{x}}dx$ est convergente et donner sa valeur.
2. Montrer que la fonction f suivante est une densité de probabilité :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x\sqrt{2x}} & \text{si } x \geq 2, \\ 0 & \text{si } x < 2. \end{cases}$$

3. On considère maintenant une variable aléatoire X admettant f pour densité.
   (a) Déterminer la fonction de répartition de X.
   (b) La variable aléatoire X admet-elle une espérance ?

On considère trois variables aléatoires X_1, X_2, X_3 indépendantes et toutes de même loi que X.

4. On pose $U = \min(X_1, X_2, X_3)$ et on admet que U est une variable aléatoire.
   (a) Déterminer la fonction de répartition G de U.
   (b) Montrer que U est une variable aléatoire à densité et donner une densité g de U.
   (c) Montrer que U admet une espérance et calculer $E(U)$.
5. On pose $V = \max(X_1, X_2, X_3)$ et on admet que V est une variable aléatoire.
   (a) Déterminer la fonction de répartition H de V.
   (b) Montrer que V est une variable aléatoire à densité et donner une densité h de V.
   (c) La variable aléatoire V admet-elle une espérance ?
