TD 13

Lois à densité usuelles

Exercice 1 (★)

On considère une variable aléatoire X suivant une loi uniforme sur $[-1, 1]$.

1. On considère $Y = |X|$.
   (a) Calculer $E(Y)$ par le théorème de transfert.
   (b) Déterminer la loi de Y.
   (c) Retrouver $E(Y)$ à l'aide de la loi de Y.
2. Mêmes questions avec $Z = e^X$.

Exercice 2 (★)

Soit U une variable aléatoire suivant une loi uniforme sur $[0, 1]$ et λ un réel strictement positif.

1. Déterminer la loi de $V = 1 - U$.
2. Déterminer la loi de $X = -\dfrac{\ln(1-U)}{\lambda}$.
3. En déduire une simulation informatique de la loi exponentielle de paramètre λ utilisant uniquement la fonction prédéfinie `rd.random()`.

Exercice 3 (★)

Soit X une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre $\dfrac{1}{2}$.

1. (a) Déterminer une densité de $Y = \sqrt{X}$.
   (b) Déterminer l'espérance et la variance de Y.
2. Déterminer une densité de $Z = X^2$.

Exercice 4 (★★)

Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \begin{cases} xe^{-x^2/2} & \text{si } x \geq 0, \\ 0 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

1. Vérifier que f est une densité.
2. On note X une variable aléatoire admettant f comme densité.
   (a) Déterminer la fonction de répartition F_X de X.
   (b) Déterminer le réel μ, appelé médiane de X, tel que $F_X(\mu) = \dfrac{1}{2}$.
   (c) On appelle mode de la variable X tout réel x en lequel f atteint son maximum. Montrer que X a un seul mode et le déterminer.
3. On pose $Y = X^2$ et on admet que Y est une variable aléatoire.
   (a) Déterminer la fonction de répartition de Y.
   (b) En déduire que Y est à densité et reconnaître la loi suivie par Y.
   (c) Justifier que X admet un moment d'ordre 4 et le calculer.

Exercice 5 (★★)

On désigne par x_0 et α deux réels strictement positifs. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \alpha \dfrac{x_0^\alpha}{x^{\alpha+1}} & \text{si } x \geq x_0, \\ 0 & \text{si } x < x_0. \end{cases}$$

1. Vérifier que f est une densité.

On désigne par X une variable aléatoire admettant f pour densité. On dit que X suit la loi de Pareto de paramètres α et x_0.

2. (a) Déterminer les valeurs de α pour lesquelles X possède une espérance puis calculer $E(X)$ lorsqu'elle existe.
   (b) Déterminer les valeurs de α pour lesquelles X possède une variance puis calculer $V(X)$ lorsqu'elle existe.
3. (a) Déterminer la fonction de répartition de X.
   (b) On pose $Y = \ln\left(\dfrac{X}{x_0}\right)$ et on admet que Y est une variable aléatoire.
   Démontrer que Y est à densité et qu'elle suit une loi exponentielle dont on donnera le paramètre.

Exercice 6 (★★)

1. On considère l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2}.$$

   (a) Vérifier que la fonction f est paire.
   (b) Montrer que f est une densité d'une variable aléatoire réelle.
   Dans toute la suite, on considère la variable aléatoire à densité X, de densité f.
   (c) Déterminer la fonction de répartition de X.
   (d) Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} xf(x)dx$ converge.
   (e) En utilisant l'imparité de la fonction $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto xf(x)$, montrer que X admet une espérance et que l'on a : $E(X) = 0$.
2. (a) Montrer que $\varphi(x) = \ln(1+e^x)$ est une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle I à déterminer.
   (b) Exprimer, pour tout $y \in I$, $\varphi^{-1}(y)$.
   On définit la variable aléatoire réelle Y par : $Y = \varphi(X)$.
   (c) Justifier que $P(Y \leq 0) = 0$.
   (d) Déterminer la fonction de répartition de Y.
   (e) Reconnaître alors la loi de Y et donner, sans calcul, son espérance et sa variance.

Exercice 7 (★★)

1. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x)^2}dx$ est convergente et donner sa valeur.
2. On considère la fonction f définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \frac{1}{2(1+|x|)^2}.$$

(a) Montrer que f est paire.

(b) Montrer que f peut être considérée comme une fonction densité de probabilité.

Dans la suite, on considère une variable aléatoire X, définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ admettant f comme densité. On note F la fonction de répartition de X.

3. On pose $Y = \ln(1+|X|)$ et on admet que Y est une variable aléatoire, elle aussi définie sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$.

   (a) Déterminer $Y(\Omega)$.

   (b) Exprimer la fonction de répartition G de Y à l'aide de F.

   (c) En déduire que Y est à densité et que Y admet pour densité la fonction g définie par :

$$g(x) = \begin{cases} 2e^x f(e^x - 1) & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

   (d) Montrer enfin que Y suit une loi exponentielle dont on déterminera le paramètre.

Exercice 8 (★★★)

1. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 4x \end{pmatrix}$, où x désigne un nombre réel.

   (a) Montrer que A est diagonalisable dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ si et seulement si A possède 2 valeurs propres distinctes.

   (b) Écrire l'équation dont les solutions sont les valeurs propres λ de la matrice A.

   (c) En déduire que A est diagonalisable dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ si et seulement si $x^2 > \dfrac{1}{4}$.

2. Dans la suite, X est une variables aléatoire réelle, définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$, et qui suit la loi uniforme sur $[0, 1]$.

   (a) Déterminer la fonction de répartition de la variable aléatoire $Y = X^2$.

   (b) Justifier que Y est à densité et déterminer une densité de Y.

   (c) En déduire que la probabilité que la matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 4X \end{pmatrix}$ soit diagonalisable dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ est égale à $\dfrac{1}{2}$.

Exercice 9 (★★)

Deux joueurs se relaient pendant la pause déjeuner. Le joueur 1 arrive à 12h (considéré comme l'instant 0) et joue jusqu'à l'arrivée du joueur 2. Le joueur 2 arrive au hasard entre 12h et 13h puis joue jusqu'à 13h (considéré comme l'instant 1).
On note :

- R la variable aléatoire égale à la durée (en heure) du jeu pour le joueur 1 ;
- S la variable aléatoire égale à la durée (en heure) du jeu pour le joueur 2 ;
- T la variable aléatoire égale à la durée (en heure) de jeu effectuée par le joueur ayant joué le plus longtemps c'est-à-dire que : $T = \max(R, S)$.

Pour toute variable aléatoire X, on note F_X la fonction de répartition de X.
On admet que R et S sont deux variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ modélisant l'expérience. En outre, on suppose que :

$$R \text{ suit la loi uniforme sur } [0,1] \text{ et que } S = 1 - R$$

(cette dernière relation traduisant que le temps total consacré au jeu par le joueur 1 et le joueur 2 est exactement d'une heure).

1. Expliciter la fonction F_R puis la fonction F_S. Reconnaître alors la loi suivie par la variable aléatoire S.
2. Pour tout réel t, prouver que : $P(T \leq t) = P\Big((R \leq t) \cap (R \geq 1-t)\Big)$.
3. Déterminer, pour tout $t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$, l'expression de F_T en fonction de t.
4. Justifier que T suit la loi uniforme sur $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$.
5. En déduire que T admet une espérance $E(T)$ et une variance $V(T)$ que l'on précisera.

Exercice 10 (★★)
Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivants des lois exponentielles de paramètres respectifs λ et μ. On définit les variables aléatoires U et V par :

$$U = \max(X, Y) \quad \text{ et } \quad V = \min(X, Y).$$

1. (a) Déterminer la fonction de répartition de U.
   (b) En déduire que U est à densité et déterminer une densité de U.
2. (a) Reconnaître la loi de V.
   (b) En déduire l'espérance et la variance de V.
3. (a) Exprimer $U + V$ en fonction de X et Y.
   (b) En déduire l'espérance de U.

Exercice 11 (★★★)
Soit X une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre 1.

1. On pose $Y = \lfloor X \rfloor$.
   (a) Déterminer $Y(\Omega)$ puis calculer $P(Y = k)$, $\forall k \in Y(\Omega)$.
   (b) Vérifier que la variable $Z = Y+1$ suit une loi géométrique dont on déterminera le paramètre.
   (c) En déduire $E(Y)$ et $V(Y)$.
2. On définit maintenant la partie décimale de X par : $D = X - \lfloor X \rfloor$.
   (a) Justifier que : $\forall t < 0$, $F_D(t) = 0$ et $\forall t \geq 1$, $F_D(t) = 1$.
   (b) Justifier l'égalité : $\forall t \in [0, 1[$, $(D \leq t) = \displaystyle\bigcup_{n=0}^{+\infty} (n \leq X \leq n + t)$.
   (c) En déduire que : $\forall t \in [0, 1[$, $F_D(t) = \dfrac{1 - e^{-t}}{1 - e^{-1}}$.
   (d) Vérifier que D est une variable à densité et donner une densité de D.

Exercice 12 (★★)

Soient Y et U deux variables aléatoires indépendantes définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$. On suppose que Y suit une loi exponentielle de paramètre 1 et que U suit une loi uniforme sur $\{-1, 1\}$ (c'est-à-dire que $P(U=-1) = P(U=1) = \frac{1}{2}$).

1. On pose $X = UY$ et on admet que X est une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$.
   (a) En utilisant le système complet d'événements $((U=-1), (U=1))$, montrer que :
      - pour tout $x \geq 0$, $P(X > x) = \frac{1}{2}P(Y > x)$;
      - pour tout $x < 0$, $P(X \leq x) = \frac{1}{2}P(Y \geq -x)$.

   (b) En déduire une expression de la fonction de répartition F_X de X.
   (c) Conclure que X est à densité et déterminer une densité de probabilité de X.
2. On pose $Z = |X|$ et on admet que Z est une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$.
   (a) Déterminer la fonction de répartition F_Z de Z.
   (b) En déduire que Z est à densité et reconnaître la loi de Z.

Exercice 13 (★★★)

1. Soit X une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. Montrer que X vérifie les trois propriétés suivantes :
   (P_1) $X(\Omega) = \mathbb{R}_+$,
   (P_2) $\forall s \in \mathbb{R}_+$, $P(X > s) \neq 0$,
   (P_3) $\forall (s,t) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$, $P_{(X>s)}(X > s+t) = P(X > t)$.
2. Réciproquement, soit X est une variable aléatoire vérifiant les propriétés (P_1), (P_2) et (P_3) précédentes. On suppose que la fonction de répartition F de X est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$.
   On pose, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $G(t) = P(X > t)$.
   (a) Montrer que : $\forall (s,t) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$, $G(s+t) = G(s)G(t)$.
   (b) Montrer que : $G(0) = 1$.
   (c) Déduire des deux questions précédentes que, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $G'(t) = G'(0)G(t)$.
   (d) On pose $\lambda = -G'(0)$. Déterminer l'expression de G en fonction de t et de λ.
   (e) En déduire que X suit la loi exponentielle de paramètre λ.

Exercice 14 (★)

1. Soit X suivant la loi $\mathcal{N}(0,1)$. Déterminer $P(X \leq -0,81)$ et $P(|X| \leq 1,17)$.
2. Soit X suivant la loi $\mathcal{N}(0,1)$. Déterminer $t > 0$ tel que $P(|X| < t) = 0,95$.
3. Soit X suivent la loi normale $\mathcal{N}(8,4)$.
   Déterminer $P(X > 8,5)$, $P(6,5 < X < 10)$ et $P_{(X>5)}(X > 6)$.
4. Soit X une variable aléatoire suivant $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$. Déterminer m et σ sachant que :

$$\begin{cases} P(X < -1) = 0,025, \\ P(X > 3) = 0,242. \end{cases}$$

Exercice 15 (★★)

Sur une ligne de bus, une enquête a permis de révéler que le retard (ou l'avance) sur l'horaire officiel du bus à une station donnée, peut être représenté(e) par une variable aléatoire réelle, notée X, exprimée en minute, qui suit une loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$.
On admet de plus que la probabilité que le retard soit inférieur à 7 minutes est égale à $p = 0.8413$ et que l'espérance de X est de 5 minutes.

1. Déterminer la valeur de σ en utilisant la table de la loi normale centrée réduite.
2. Quelle est la probabilité que le retard soit supérieur à 9 minutes ?
3. Sachant que le retard est supérieur à 3 minutes, quelle est la probabilité que le retard soit inférieur à 7 minutes ? On exprimera cette probabilité à l'aide de la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite, puis on utilisera la table.

Exercice 16 (★★)

Soient deux variables aléatoires réelles X et U définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$, indépendantes, X suivant la loi normale centrée réduite et U suivant la loi uniforme sur $\{-1, 1\}$.
On définit $Y = UX$.

1. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R},\ P(Y \leq x) = \dfrac{1}{2}P(X \leq x) + \dfrac{1}{2}P(X \geq -x)$.
2. En déduire que Y suit la loi normale centrée réduite.
3. Calculer l'espérance de U puis montrer que $E(XY) = 0$.
4. En déduire que $Cov(X, Y) = 0$.

Exercice 17 (★)

Soit $\lambda > 0$. Justifier que les intégrales suivantes convergent et donner leurs valeurs :

1. $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\lambda x}dx,\ \int_0^{+\infty} xe^{-\lambda x}dx,\ \int_0^{+\infty} x^2e^{-\lambda x}dx.$
2. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2}dx,\ \int_{-\infty}^{+\infty} xe^{-x^2/2}dx,\ \int_0^{+\infty} x^2e^{-x^2/2}dx.$

Exercice 18 (★★)

Soit $\lambda > 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$I_n = \int_0^{+\infty} x^n e^{-\lambda x}dx.$$

1. Montrer que I_n converge pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Calculer I_0.
3. Montrer que : $\forall n \geq 1,\ I_n = \dfrac{n}{\lambda}I_{n-1}$.
4. En déduire la valeur de I_n en fonction de n.
5. En déduire l'existence et la valeur des moments d'ordre n et de la variance d'une variable X suivant une loi exponentielle de paramètre λ.

Exercice 19 (★★)

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$I_n = \int_{-\infty}^{+\infty} x^n e^{-x^2/2} dx.$$

1. (a) Prouver que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^n e^{-x^2/2} dx$ converge.

   (b) En déduire que I_n converge pour tout $n \in \mathbb{N}$ et donner sa valeur dans le cas où n est impair.

2. Cas $n = 2k$ pair :

   (a) On pose $J_{2k}(a) = \displaystyle\int_0^a x^{2k} e^{-x^2/2} dx$.

   Trouver une relation de récurrence entre $J_{2k}(a)$ et $J_{2k-2}(a)$.

   (b) En déduire une relation de récurrence liant I_{2k} et I_{2k-2}.

   (c) Montrer que : $\forall k \in \mathbb{N}$, $I_{2k} = \dfrac{(2k)!}{2^k k!} I_0$.

3. En déduire la valeur des moments et de la variance d'une variable X suivant une loi normale centrée réduite.
