TD 2

# Calcul matriciel

## Opérations sur les matrices

**Exercice 1 (★)**

1. On pose $J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer $J^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

2. On pose $T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. Calculer $T^n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3. On considère les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par $a_0, b_0, c_0 \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\left\{\begin{array}{lcl} a_{n+1} & = & 2a_n \\ b_{n+1} & = & 3a_n + 2b_n \\ c_{n+1} & = & -b_n + 2c_n \end{array}\right.$$

   En utilisant la question précédente, calculer $a_n$, $b_n$ et $c_n$ en fonction de $n$, $a_0$, $b_0$ et $c_0$.

---

**Exercice 2 (★★)**

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Calcul des puissances de $A$ par la formule du binôme.
   (a) Soit $B = A - 2I_3$. Calculer $B^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.
   (b) En déduire $A^n$ en fonction de $A$ et de $I_3$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Calcul des puissances de $A$ à l'aide d'un polynôme annulateur.
   (a) Exprimer $A^2$ en fonction de $A$ et de $I_3$. En déduire un polynôme annulateur de $A$.
   (b) Montrer qu'il existe deux suites $(a_n)$ et $(b_n)$ telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = a_nI_3 + b_nA$.
   (c) Expliciter $a_n$ et $b_n$ en fonction de $n$ et en déduire l'expression de $A^n$ en fonction de $A$ et $I_3$.

---

**Exercice 3 (★★)**

1. Montrer que le polynôme $P(X) = X^2 - 4X + 3$ est annulateur de $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

2. Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $Q_n \in \mathbb{R}[X]$ et $(a_n, b_n) \in \mathbb{R}^2$ tels que :

$$X^n = PQ_n + a_nX + b_n.$$

3. Déterminer $a_n$ et $b_n$ en fonction de $n$.

4. En déduire l'expression de $A^n$ en fonction de $n$.

---

**Exercice 4 (★★)**
On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que $P(X) = X^3 - 2X^2 + X$ est un polynôme annulateur de $A$.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $Q_n \in \mathbb{R}[X]$ et $(a_n, b_n, c_n) \in \mathbb{R}^3$ tels que :
$$X^n = PQ_n + a_nX^2 + b_nX + c_n.$$
3. Déterminer $a_n$, $b_n$, $c_n$ en fonction de $n$. On pourra utiliser que $P(0) = P(1) = P'(1) = 0$.
4. En déduire l'expression de $A^n$ en fonction de $n$.

---

**Exercice 5 (★)**
On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ -1 & 7 & 2 \\ 1 & 1 & 6 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $Q = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $PQ$. Que peut-on en déduire ?
2. Déterminer la matrice $D \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ qui vérifie la relation $A = PDQ$.
3. Montrer que, pour tout entier naturel $n$, $A^n = PD^nQ$.
4. Expliciter $A^n$.

---

**Exercice 6 (★)**
On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & -5 & 6 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

1. (a) Montrer que $P(X) = X^2 + X - 2$ est un polynôme annulateur de $A$.
   (b) En déduire que $A$ est inversible et déterminer son inverse.
   (c) Retrouver ce résultat à l'aide de la méthode du pivot.
2. (a) Montrer que $P(X) = X^2 - 2X$ est un polynôme annulateur de $B$.
   (b) En déduire que la matrice $B$ n'est pas inversible.
   (c) Proposer une autre méthode pour prouver que $B$ n'est pas inversible.

---

**Exercice 7 (★)**
On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -3 & 4 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que $P(X) = (X-1)(X-2)$ est un polynôme annulateur de $A$.
2. En déduire que $A$ est inversible et calculer son inverse (sans faire de pivot).
3. Vérifier vos résultats en utilisant maintenant la méthode du pivot.
4. Résoudre sans faire de pivot le système linéaire suivant dans $\mathbb{R}^3$ :
$$\left\{ \begin{array}{rcl} -x + y & = & 3 \\ y - z & = & 1 \\ -3x + 4y - 3z & = & -2 \end{array} \right.$$

---

### Exercice 8 (★)

Déterminer si les matrices suivantes sont inversibles et, si c'est le cas, calculer leurs inverses :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

---

### Exercice 9 (★★)

On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. (a) Montrer que la matrice $P$ est inversible et déterminer $P^{-1}$.
   (b) On pose $T = PAP^{-1}$. Calculer $T$, $T^2$, $T^3$ puis $T^n$ pour tout entier naturel $n \geq 3$..
   (c) En déduire que : $\forall n \geq 3,\ A^n = 0$.

2. Pour tout réel $t$, on définit la matrice $E(t)$ par : $E(t) = I_3 + tA + \frac{t^2}{2}A^2$.
   (a) Montrer que : $\forall (t, t') \in \mathbb{R}^2, \quad E(t)\,E(t') = E(t + t')$.
   (b) Pour tout $t$ réel, calculer $E(t)\,E(-t)$. En déduire que la matrice $E(t)$ est inversible et déterminer son inverse en fonction de $I_3$, $A$, $A^2$, $t$.
   (c) Pour tout $t \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, déterminer $[E(t)]^n$ en fonction de $I_3$, $A$, $A^2$, $t$ et $n$.

---

## Noyau, image et rang d'une matrice

### Exercice 10 (★)

Déterminer le noyau, l'image et le rang des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 2 \\ -4 & 3 & -4 \\ -1 & -1 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 \\ -1 & 1 & 2 \\ -3 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & -4 \\ -2 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & -4 & -1 & -11 \end{pmatrix}.$$

---

## Réduction des matrices carrées

### Exercice 11 (★)

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$. On pose $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $X_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que $X_1$, $X_2$ et $X_3$ sont des vecteurs propres de $A$ et expliciter les valeurs propres associées.

2. Prouver que la famille $(X_1, X_2, X_3)$ est une base de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

3. En déduire que $A$ est diagonalisable et la diagonaliser.

---

### Exercice 12 (★)

On considère les matrices $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -\sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. $J$ est-elle diagonalisable ? inversible ? En déduire une valeur propre de $J$.

2. Justifier avec le minimum de calculs que $P^{-1}JP$ est diagonale et donner cette matrice.

---

## Exercice 13 (★★)

Déterminer si les matrices suivantes sont diagonalisables et, si c'est le cas, les diagonaliser :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -4 \\ -2 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -4 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ -2 & -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

---

## Exercice 14 (★★)

Déterminer les valeurs propres des matrices suivantes et en déduire si elles sont diagonalisables :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

---

## Exercice 15 (★)

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que $A^2 - 3A + 2I_3 = 0$.
2. En déduire les valeurs propres de $A$.
3. Déterminer une base de chacun des sous-espaces propres de $A$.
4. En déduire que $A$ est diagonalisable et la diagonaliser.

---

## Exercice 16 (★)

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

1. Vérifier que $X^3 + X^2 - 2X$ est un polynôme annulateur de $A$.
2. Déterminer les valeurs propres de $A$.
3. La matrice $A$ est-elle inversible ? diagonalisable ?

---

## Exercice 17 (★★)

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. La matrice $A$ est-elle diagonalisable ?
2. (a) La matrice $A$ est-elle inversible ?
   (b) En déduire une valeur propre de $A$.
3. (a) Calculer $A^2$.
   (b) Déterminer alors un polynôme annulateur de $A$.
4. (a) Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de $A$.
   (b) Exhiber une matrice $D \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ diagonale et $P \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ inversible telles que $A = PDP^{-1}$.

---

**Exercice 18 (★)**
On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $(A - I_3)^3$.
2. Prouver sans faire de pivot que 1 est la seule valeur propre de $A$.
3. $A$ est-elle diagonalisable ?

---

**Exercice 19 (★★)**
On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer la matrice $B$ définie par $B = A^2 + 2I_3$.
2. Calculer $B^2$ et l'exprimer en fonction de $B$ et de $I_3$.
3. Quelles sont les valeurs propres de $B$ ?
4. Montrer que si $\lambda$ est une valeur propre de $A$, alors $\lambda^2 + 2$ est une valeur propre de $B$.
5. En déduire que $A$ n'est pas diagonalisable dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

---

**Exercice 20 (★★)**

1. On considère la matrice $N = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ -3 & -8 & -3 \end{pmatrix}$.
   (a) Calculer $N^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.
   (b) La matrice $N$ est-elle inversible ?
   (c) Montrer que si $\lambda$ est valeur propre de $N$, alors $\lambda = 0$.
   (d) En déduire que 0 est la seule valeur propre de $N$.
   (e) La matrice $N$ est-elle diagonalisable ?
2. On pose $A = 3I_3 + N$.
   (a) Montrer que $A$ admet 3 pour unique valeur propre.
   (b) La matrice $A$ est-elle diagonalisable ?

---

**Exercice 21 (★★)**

1. Montrer que si une matrice carrée $A$ est diagonalisable, alors ${}^tA$ est aussi diagonalisable.
2. Montrer que $A$ et ${}^tA$ ont les mêmes valeurs propres.
3. (a) Montrer que $A$ et ${}^tA$ ont des sous-espaces propres de même dimension.
   (b) Les sous-espaces propres de $A$ et ${}^tA$ sont-ils nécessairement égaux ?

---

**Exercice 22 (★★)**
On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

1. Justifier qu'il existe $P$ inversible et $D$ diagonale telles que $A = PDP^{-1}$.
   Expliciter une telle matrice $D$.

2. (a) Vérifier que $D(D - I_3)(D - 4I_3) = 0$.
   (b) En déduire que $A^3 = 5A^2 - 4A$.

3. Trouver une matrice $B$, fonction de la matrice $P$, telle que $B^2 = A$.

4. On pose, pour tout $a \in \mathbb{R}$, $M_a = A + aI_3$.
   Prouver qu'il existe $D_a$ diagonale (à expliciter) telle que $M_a = PD_aP^{-1}$.

---

**Exercice 23 (★★)**
Soit $a$ un réel positif ou nul. On considère la matrice :

$$A(a) = \begin{pmatrix} 1 & a-2 & a & 1 \\ a & -1 & 1 & a \\ 0 & 0 & -a & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. (a) Montrer que $A(0)$ admet $1$ et $-1$ comme seules valeurs propres.
   (b) Donner les sous-espaces propres correspondants. $A(0)$ est-elle diagonalisable ?

Dans toute la suite, on suppose que $a > 0$.

2. Montrer que les valeurs propres de $A(a)$ sont les réels $\lambda$ solutions de l'une des équations :

$$\lambda^2 = (a-1)^2 \qquad \text{et} \qquad \lambda^2 + a\lambda + 1 = 0.$$

3. (a) Déduire de la question précédente la valeur pour laquelle $A(a)$ n'est pas inversible.
   (b) Pour cette valeur, dire si $A(a)$ est diagonalisable.

4. On suppose dans cette question que $a > 2$.
   (a) Montrer que $A(a)$ possède quatre valeurs propres distinctes deux à deux.
   (b) En déduire que $A(a)$ est diagonalisable.

---

# Applications de la réduction

**Exercice 24 (★★)**
Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 0 \\ -3 & -5 & 0 \\ -3 & -6 & -5 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de $A$.

2. Justifier que $A$ est diagonalisable et expliciter une matrice $P$ inversible et une matrice $D$ diagonale telles que $A = PDP^{-1}$.

3. Montrer que, pour tout entier naturel $n$, $A^n = PD^nP^{-1}$.

4. Donner explicitement $A^n$ en fonction de $n \in \mathbb{N}$.

---

### Exercice 25 (★★)

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 4,\ u_1 = 2,\ u_2 = -3, \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+3} = 2u_{n+2} + u_{n+1} - 2u_n. \end{cases}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $X_n$ la matrice ligne $X_n = \begin{pmatrix} u_n & u_{n+1} & u_{n+2} \end{pmatrix}$.

1. Déterminer une matrice $A \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} = X_n A$.
2. En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N},\ X_n = X_0 A^n$.
3. Calculer $A^3 - 2A^2 - A$. En déduire un polynôme annulateur de $A$.
4. Déterminer les valeurs propres de $A$ et les sous-espaces propres associés.
5. Justifier que $A$ est diagonalisable.
6. Déterminer l'expression de $A^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
7. En déduire l'expression de $u_n$ en fonction de $n \in \mathbb{N}$.

---

### Exercice 26 (★★)

On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 5 & 5 & -14 \\ 6 & 6 & -16 \\ 5 & 5 & -14 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 8 & 4 & -16 \\ 0 & 4 & -8 \\ 4 & 4 & -12 \end{pmatrix}$.

On considère également les matrices colonnes : $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $V_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

1. (a) Vérifier que $V_1$, $V_2$ et $V_3$ sont des vecteurs propres de $A$. Quelles sont les valeurs propres associées ?
   (b) En déduire que $A$ est diagonalisable.
   (c) Expliciter une matrice $P$ inversible et une matrice $D$ diagonale, dont les éléments diagonaux sont dans l'ordre décroissant, telles que $A = PDP^{-1}$.
   (d) Calculer la matrice $\Delta = P^{-1}BP$ et vérifier qu'elle est diagonale.
2. On se propose de déterminer les matrices lignes $X_n$ définies par :
   $$X_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad X_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N},\ X_{n+2} = X_{n+1}A + X_n B.$$
   On définit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $Y_n = X_n P$ et on pose également $Y_n = \begin{pmatrix} u_n & v_n & w_n \end{pmatrix}$.
   (a) Calculer $Y_0$ et $Y_1$.
   (b) Montrer que pour tout entier naturel $n$, $Y_{n+2} = Y_{n+1}D + Y_n\Delta$.
   (c) Montrer alors que pour tout entier naturel $n$ :
   $$\begin{cases} u_{n+2} = u_{n+1} \\ v_{n+2} = 4v_n \\ w_{n+2} = -4w_{n+1} - 4w_n \end{cases}$$
   En déduire les expressions explicites de $u_n$, $v_n$ et $w_n$ en fonction de $n$.
   (d) Donner finalement la matrice $X_n$ en fonction de $n$.

---

### Exercice 27 (★★★)

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 7 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & -1 \\ -2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$.

1. (a) Déterminer le spectre de $A$.
   (b) Déterminer une base de chacun des sous-espaces propres de $A$.
   (c) Démontrer que $A$ est diagonalisable et expliciter une matrice $P$ inversible et une matrice $D$ diagonale vérifiant $d_{3,3} = 9$ telles que $A = PDP^{-1}$.

2. On souhaite déterminer l'ensemble appelé **commutant** de $A$ suivant :

$$C_A = \{M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}) \mid AM = MA\}.$$

   C'est l'ensemble des matrices qui commutent avec $A$.

   (a) On pose le changement de variable $N = P^{-1}MP$.
   Montrer que $M$ appartient à $C_A$ si et seulement si $N$ vérifie l'équation $DN = ND$.
   (b) Montrer que $N$ vérifie $DN = ND$ si et seulement si $N = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & e \end{pmatrix}$ avec $a, b, c, d, e \in \mathbb{R}$.
   (c) En déduire les matrices de $C_A$.

---

**Exercice 28 (★★★)**
On considère dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ l'équation :

$$(\mathcal{E}) : \qquad X^2 - 3X + I_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Diagonaliser la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ (en mettant les valeurs propres de $A$ dans l'ordre décroissant).

2. En effectuant un changement de variable judicieux, justifier que l'équation $(\mathcal{E})$ est équivalente à l'équation :

$$(\mathcal{E}') : \qquad Y^2 - 3Y + I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

   sur la nouvelle variable $Y$.

3. Montrer que toute solution de $(\mathcal{E}')$ commute avec $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

4. Résoudre $(\mathcal{E}')$ puis en déduire les solutions de $(\mathcal{E})$ en fonction de $P$ et de $P^{-1}$.

---

**Exercice 29 (★★★)**
On pose considère la matrice : $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

1. (a) Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de $A$.
   (b) Montrer que $A$ est diagonalisable.
   (c) Déterminer une matrice diagonale $D$ et une matrice inversible $P$ telles que $A = PDP^{-1}$.
   (d) Calculer $P^{-1}$.

2. On se propose de résoudre l'équation $M^2 = A$, d'inconnue $M$ une matrice carrée d'ordre trois.

   (a) On note $N = P^{-1}MP$. Montrer : $M^2 = A \Leftrightarrow N^2 = D$.
   (b) Établir que, si $N^2 = D$, alors $ND = DN$.
   (c) Résoudre l'équation $DN = ND$ d'inconnue $N \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.
   (d) Déterminer toutes les matrices diagonales $N \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $N^2 = D$.
   (e) Expliciter les matrices $M$ solutions de l'équation $M^2 = A$.

---