

Compléments sur les séries réelles

Exercice 1 (★)

Calculer les sommes suivantes après avoir vérifié la convergence des séries :

$$\begin{array}{llll}
 (1) \sum_{n=4}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{3^{n+1}} & (2) \sum_{n=0}^{+\infty} n e^{-2n} & (3) \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{4n^2 - 3n - 1}{4^{n-2}} & (4) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{5^{n/2}}{(n+1)!} \\
 (5) \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{n 2^n}{n!} & (6) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n^2 + 1}{n!} & (7) \sum_{n=2}^{+\infty} \ln \left(1 - \frac{1}{n} \right) & (8) \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\ln \left(\frac{n+1}{n} \right)}{\ln(n) \ln(n+1)}
 \end{array}$$

Exercice 2 (★★)

On considère la matrice $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

Pour tout entier naturel n non nul, et pour tout réel t , on définit la matrice $E_n(t)$ par :

$$E_n(t) = \sum_{k=0}^n \frac{t^k}{k!} B^k \text{ que l'on note } E_n(t) = \begin{pmatrix} a_n(t) & c_n(t) \\ b_n(t) & d_n(t) \end{pmatrix}$$

1. Montrer que B est diagonalisable et déterminer une matrice P inversible et une matrice D diagonale telles que $B = PDP^{-1}$.

2. Pour tout entier naturel n , montrer que :

$$B^n = \begin{pmatrix} 2 - 2^n & 1 - 2^n \\ 2^{n+1} - 2 & 2^{n+1} - 1 \end{pmatrix}$$

3. Exprimer $a_n(t)$, $b_n(t)$, $c_n(t)$ et $d_n(t)$ sous la forme d'une somme.

4. Déterminer les limites de $a_n(t)$, $b_n(t)$, $c_n(t)$ et $d_n(t)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

5. Pour tout t réel, on pose alors :

$$E(t) = \begin{pmatrix} \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n(t) & \lim_{n \rightarrow +\infty} c_n(t) \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n(t) & \lim_{n \rightarrow +\infty} d_n(t) \end{pmatrix}$$

(a) Déterminer les matrices E_1 et E_2 telles que pour tout t réel, on ait :

$$E(t) = e^t E_1 + e^{2t} E_2.$$

(b) Montrer que : $\forall (t, t') \in \mathbb{R}^2, E(t)E(t') = E(t+t')$.

(c) Calculer $E(0)$. En déduire que pour tout réel t , $E(t)$ est inversible et déterminer son inverse.

Exercice 3 (★★)

Déterminer la nature des séries suivantes :

$$\begin{array}{llll}
 (1) \sum_{n \geq 0} e^{2/n^3} & (2) \sum_{n \geq 0} \frac{1}{e^n + e^{-n}} & (3) \sum_{n \geq 2} \left(1 - \frac{1}{n} \right)^n & (4) \sum_{n \geq 1} \frac{\ln(n)}{n} \\
 (5) \sum_{n \geq 0} \frac{1}{3^n + 1} & (6) \sum_{n \geq 2} \frac{1}{\sqrt{n} - 1} & (7) \sum_{n \geq 2} \frac{e^{-2n} + n}{n^{3/2} + (-1)^n} & (8) \sum_{n \geq 1} \frac{\ln \left(\frac{n+1}{n} \right)}{\sqrt{n+4}} \\
 (9) \sum_{n \geq 0} \sqrt{n^2 + 1} - n & (10) \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n n^4 \ln(n)}{e^{2n}} & (11) \sum_{n \geq 2} \frac{1}{n \sqrt{n} \ln(n)} & (12) \sum_{n \geq 0} e^{-n^2} \\
 (13) \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{n^2 + 2^n} & (14) \sum_{n \geq 0} \ln \left(\frac{n^2 + 2}{n^2 + 1} \right) & (15) \sum_{n \geq 1} \ln(2 - e^{-1/n^2}) & (16) \sum_{n \geq 0} \frac{3^n + 1}{4^n + n^9}
 \end{array}$$

Exercice 4 (★)

1. (a) Justifier que la série de terme général $u_n = \ln \left(1 - \frac{1}{n^2} \right)$ converge.

(b) Calculer $\sum_{n=2}^{+\infty} \ln \left(1 - \frac{1}{n^2} \right)$.

2. (a) Justifier que la série de terme général $u_n = \frac{1}{(n+1)(n+2)}$ converge.

(b) Calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)}$.

Exercice 5 (★★)

On considère la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$.

1. Justifier que cette série converge.

2. Déterminer des réels a, b et c tels que : $\forall k \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k+1} + \frac{c}{k+2}$.

3. Déterminer alors $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$ pour tout $n \geq 1$.

4. En déduire la somme de la série.

Exercice 6 (★)

Soit α un réel strictement positif. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$u_n = n \ln \left(1 + \frac{1}{n^\alpha} \right).$$

Étudier suivant la valeur du paramètre α la nature de la série $\sum_{n \geq 1} u_n$.

Exercice 7 (★★)

Rappelons que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge et que sa somme vaut $\frac{\pi^2}{6}$.

En déduire que la série $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{(2n+1)^2}$ converge et que sa somme vaut $\frac{\pi^2}{8}$.

Exercice 8 (★)

On considère la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $a_0 > 0$ et par la relation suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+1} = a_n e^{-a_n}.$$

1. (a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n > 0$.

(b) Étudier le sens de variation de la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

(c) En déduire que $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.

2. (a) On pose $b_n = \ln(a_n)$. Calculer $b_{n+1} - b_n$ en fonction de a_n .

(b) En déduire la nature de la série $\sum a_n$.

Exercice 9 (★★)

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = \frac{1}{2}$ et par la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_n - u_n^3.$$

- (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in]0, 1[$.
 (b) Montrer que la suite (u_n) est décroissante.
 (c) Montrer que la suite (u_n) converge vers 0.
 - Montrer que la série $\sum_{n \geq 0} u_n^3$ est convergente.
 - (a) Montrer que u_{n+1} est équivalent à u_n quand n tend vers $+\infty$.
 (b) En déduire que $\frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n}$ est équivalent à u_n quand n tend vers $+\infty$.
 (c) En déduire que la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ est divergente.
-

Exercice 10 (★)

On se propose d'étudier la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par la donnée de $u_0 = 0$ et par la relation :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{u_n^2 + 1}{2}.$$

- (a) Montrer que, pour tout entier naturel n , on a : $0 \leq u_n \leq 1$.
 (b) Étudier les variations de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
 (c) En déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et donner sa limite.
 - Pour tout entier naturel n , on pose : $v_n = 1 - u_n$.
 (a) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, exprimer $v_k - v_{k+1}$ en fonction de v_k .
 (b) Simplifier, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la somme $\sum_{k=0}^n (v_k - v_{k+1})$.
 (c) Donner pour finir la nature de la série de terme général v_n^2 ainsi que la valeur de $\sum_{n=0}^{+\infty} v_n^2$.
-

Exercice 11 (★★)

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par la donnée $u_0 > 0$ et par la relation suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_n + u_n^2.$$

- (a) Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.
 (b) Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$.
On pourra faire un raisonnement par l'absurde.
 - On pose, pour tout entier naturel n , $v_n = \frac{\ln(u_n)}{2^n}$.
 (a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} - v_n = \frac{1}{2^{n+1}} \ln \left(1 + \frac{1}{u_n} \right)$.
 (b) Montrer que, pour tout $x \geq 0$, $0 \leq \ln(1+x) \leq x$.
 (c) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq v_{n+1} - v_n \leq \frac{1}{2^{n+1}u_0}$.
 (d) Montrer que la série de terme général $v_{n+1} - v_n$ est convergente.
 (e) En déduire que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.
-

Exercice 12 (★★)

Soit (u_n) la suite définie par : $u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} = \frac{3n+1}{3n}u_n$.

1. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n > 0$.
 2. Étudier la nature de la série de terme général $\ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$.
 3. Conclure quant à la nature de la suite $(\ln(u_n))_{n \geq 1}$ et enfin quant à celle de la suite $(u_n)_{n \geq 1}$.
-

Exercice 13 (★★)

On désigne par α un réel strictement positif. Pour tout entier naturel n , on pose :

$$u_n(\alpha) = \frac{n!}{\prod_{k=0}^n (\alpha + k)}.$$

1. (a) Montrer que la suite $(u_n(\alpha))$ est monotone et convergente. On note $\ell(\alpha)$ sa limite.
 (b) Que peut-on en déduire pour la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} (u_n(\alpha) - u_{n+1}(\alpha))$?
 (c) On suppose que $\ell(\alpha)$ est non nulle. Démontrer que : $u_n(\alpha) - u_{n+1}(\alpha) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\alpha \ell(\alpha)}{n}$.
 (d) Dédurre de ce qui précède que $\ell(\alpha) = 0$.
 2. Dans cette question, on suppose que $\alpha \in]0, 1[$.
 (a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n(\alpha) \geq \frac{1}{n+1}$.
 (b) Quelle est la nature de la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n(\alpha)$?
-

Exercice 14 (★★)

Soit $x \in]0, 1[$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $S_n(x) = \sum_{k=0}^n x^k$.

1. (a) Calculer $S_n(x)$.
 (b) En déduire que la série $\sum_{n \geq 0} x^n$ converge et expliciter sa somme.
 2. (a) Calculer de deux façons distinctes la dérivée $S'_n(x)$.
 (b) En déduire que : $\sum_{k=0}^n kx^{k-1} = \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(1-x)^2}$.
 (c) Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} nx^n$.
 (d) En déduire que la série $\sum_{n \geq 0} nx^{n-1}$ converge et que $\sum_{n=0}^{+\infty} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$.
-

Exercice 15 (★★)

On pose pour tout $x \in]0, 1[$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $S_n(x) = \sum_{k=1}^n \frac{x^k}{k}$ et $S(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k}$.

- Justifier l'existence de $S(x)$ pour tout $x \in]0, 1[$.
 - Soient $x \in]0, 1[$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que : $S_n(x) = \int_0^x \frac{1-t^n}{1-t} dt$.
 - Soit $x \in]0, 1[$. Démontrer que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt = 0$.
 - En déduire que : $\forall x \in]0, 1[, S(x) = -\ln(1-x)$.
 - En déduire la valeur de $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k \times 3^k}$.
-

Exercice 16 (★★)

Le but de cet exercice est de démontrer le résultat bien connu suivant sur les séries de Riemann :

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha} \text{ converge si et seulement si } \alpha > 1.$$

- Étudier la nature de la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ lorsque $\alpha \leq 0$.
- Soit $\alpha > 0$.
 - Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Donner un encadrement de $\frac{1}{x^\alpha}$ lorsque $x \in [k, k+1]$.
 - En déduire que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$: $\frac{1}{(k+1)^\alpha} \leq \int_k^{k+1} \frac{dx}{x^\alpha} \leq \frac{1}{k^\alpha}$.
 - En sommant les inégalités précédentes, montrer que :

$$\frac{1}{n^\alpha} + \int_1^n \frac{dx}{x^\alpha} \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha} \leq 1 + \int_1^n \frac{dx}{x^\alpha}.$$

- Déduire de la question précédente que si $\alpha \in]0, 1]$, alors la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ diverge.
 - Déduire toujours de la question 2.(c) que si $\alpha > 1$, alors la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ converge.
-

Exercice 17 (★★★)

Le but de cet exercice est de démontrer que :

$$\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n^\alpha \ln(n)} \text{ converge si et seulement si } \alpha > 1$$

- Montrer que si $\alpha > 1$, alors la série de terme général $\frac{1}{n^\alpha \ln(n)}$ converge.
- Montrer que si $\alpha < 1$, alors la série de terme général $\frac{1}{n^\alpha \ln(n)}$ diverge.
- On note pour tout entier $n \geq 2$, $S_n = \sum_{k=2}^n \frac{1}{k \ln(k)}$.

- (a) Démontrer que pour tout entier naturel $k \geq 3$,

$$\int_k^{k+1} \frac{1}{t \ln(t)} dt \leq \frac{1}{k \ln(k)} \leq \int_{k-1}^k \frac{1}{t \ln(t)} dt.$$

- (b) En déduire que $S_n \sim \ln(\ln(n))$ et déterminer la nature de la série de terme général $\frac{1}{n \ln(n)}$.

4. Pour tout entier $n \geq 2$, on pose :

$$u_n = S_n - \ln(\ln(n+1)) \quad \text{et} \quad v_n = S_n - \ln(\ln(n)).$$

- (a) Montrer que les suites $(u_n)_{n \geq 2}$ et $(v_n)_{n \geq 2}$ sont adjacentes. On notera ℓ leur limite commune.

- (b) Montrer que, pour tout entier $n \geq 2$, on a : $0 \leq v_n - \ell \leq \frac{1}{n \ln(n)}$.

- (c) Écrire un programme pour obtenir une valeur approchée de ℓ à 10^{-5} près.

Exercice 18 (★★★★)

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}}$.

- Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$.
- (a) Montrer que pour tout entier naturel $k \geq 2$:

$$\int_k^{k+1} \frac{1}{\sqrt{t}} dt \leq \frac{1}{\sqrt{k}} \leq \int_{k-1}^k \frac{1}{\sqrt{t}} dt.$$

- (b) En déduire que pour tout entier $n \geq 2$:

$$2\sqrt{n+1} - 2\sqrt{2} \leq S_n - 1 \leq 2\sqrt{n} - 2.$$

- (c) En déduire que $S_n \sim 2\sqrt{n}$.

3. Dans la suite, on note pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $w_n = S_n - 2\sqrt{n}$.

- Déterminer alors deux constantes α et K telles que $w_n - w_{n-1} \sim \frac{K}{n^\alpha}$ au voisinage de $+\infty$.
- En déduire que la série de terme général $w_n - w_{n-1}$ converge.
- En déduire l'existence d'une constante réelle β telle que :

$$S_n = 2\sqrt{n} + \beta + o(1).$$