TD 5

Variables aléatoires discrètes

Variables aléatoires discrètes

Exercice 1 (★)

On lance un dé à quatre faces numérotées de 1 à 4. La probabilité de chacune des faces est proportionnelle au numéro qu'elle porte. On note X le nombre obtenu.

1. Déterminer la loi de X.
2. Calculer $E(X)$ et $V(X)$.
3. On pose $Y = \dfrac{1}{X}$. Déterminer $E(Y)$.
4. On pose $Z = 2X + 3$. Déterminer $E(Z)$ et $V(Z)$.

Exercice 2 (★)

Une urne contient 2 boules blanches et 4 boules noires. On tire les boules une à une sans les remettre jusqu'à ce qu'il ne reste que des boules d'une seule couleur dans l'urne. Soit X le nombre de tirages nécessaires.

1. Déterminer la loi de X.
2. Calculer $P(X \leq 4)$.
3. Calculer $E(X)$ et $V(X)$.

Exercice 3 (★★)

Une urne contient 2 boules blanches et $n-2$ boules rouges ($n \geq 2$).
On effectue des tirages sans remise dans cette urne. On appelle X le rang de sortie de la première boule blanche et Y le nombre de boules rouges restant à ce moment dans l'urne.

1. Déterminer la loi de X et $E(X)$.
2. Calculer $E\left(\dfrac{1}{n-X}\right)$.
3. Exprimer Y en fonction de X et calculer $E(Y)$.
4. Déterminer la loi de Y.

Exercice 4 (★★)

On joue à pile ou face avec une pièce non équilibrée dont la probabilité d'obtenir "pile" vaut p et celle de "face" vaut q (avec $p + q = 1$). On note P_k (resp. F_k) l'évènement "on obtient pile (resp. face) au k-ième lancer". On lance indéfiniment la pièce et on note X la variable aléatoire égale au rang où apparait pour la première fois deux résultats "pile" consécutifs.

1. Calculer en fonction de p et q : $P(X = 1)$, $P(X = 2)$, $P(X = 3)$, $P(X = 4)$.
2. Montrer que, pour tout entier $n \geq 3$,

$$P_{P_1}(X = n) = qP(X = n-2) \quad \text{et} \quad P_{F_1}(X = n) = P(X = n-1)$$

3. En déduire que pour tout entier $n \geq 3$: $P(X = n) = qP(X = n-1) + pqP(X = n-2)$.
4. On suppose à présent que $p = \dfrac{2}{3}$ et $q = \dfrac{1}{3}$.
   (a) Établir que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(X = n+1) = \dfrac{4}{9}\left(\left(\dfrac{2}{3}\right)^n - \left(-\dfrac{1}{3}\right)^n\right)$.
   (b) Calculer $E(X)$, $E(X(X-1))$ et $V(X)$.

Exercice 5 (★★)

On désigne par n un entier naturel non nul.
On lance n fois une pièce de monnaie donnant pile avec la probabilité p (avec $0 < p < 1$) et face avec la probabilité $q = 1 - p$. On appelle k-chaine de piles une suite de k lancers consécutifs ayant tous donné pile, cette suite devant être suivie d'un face ou être la dernière suite du tirage.
Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on note Y_k la variable aléatoire égale au nombre total de k-chaines de piles obtenues au cours de ces n lancers.
Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on pourra noter P_k l'événement "on obtient pile au k-ième lancer".
Par exemple, avec $n = 11$, si l'on a obtenu $P_1P_2F_3F_4P_5P_6P_7F_8P_9F_{10}P_{11}$ alors $Y_1 = 2$, $Y_2 = 1$ et $Y_3 = 1$.
Le but de cet exercice est de déterminer, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, l'espérance de Y_k.

1. Déterminer la loi de Y_n et donner $E(Y_n)$.
2. Déterminer la loi de Y_{n-1} et donner $E(Y_{n-1})$.
3. Dans cette question, $k \in [\![1, n-2]\!]$.
   Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on note $X_{i,k}$ la variable aléatoire qui vaut 1 si une k-chaine de piles commence au i-ième lancer et qui vaut 0 sinon.
   (a) Calculer $P(X_{1,k} = 1)$.
   (b) Soit $i \in [\![2, n-k]\!]$. Montrer que : $P(X_{i,k} = 1) = q^2p^k$.
   (c) Montrer que : $P(X_{n-k+1,k} = 1) = qp^k$.
   (d) Exprimer Y_k en fonction des variables $X_{i,k}$ puis déterminer $E(Y_k)$.

Exercice 6 (★)

Les sommets d'un carré sont numérotés $1, 2, 3$ et 4. Un pion se déplace aléatoirement sur les sommets de ce carré selon le protocole suivant :

- Au départ, le pion est sur le sommet 1.
- Lorsque le pion est à un instant donné sur un sommet, il se déplace à l'instant suivant sur l'un quelconque des trois autres sommets, et ceci de façon équiprobable.

  Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note X_n la variable aléatoire égale au numéro du sommet sur lequel se situe le pion à l'instant n.

1. (a) Utiliser la formule des probabilités totales pour établir que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :
   $$P(X_{n+1} = 1) = \frac{1}{3}P(X_n = 2) + \frac{1}{3}P(X_n = 3) + \frac{1}{3}P(X_n = 4).$$
   (b) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $P(X_{n+1} = 1) = -\dfrac{1}{3}P(X_n = 1) + \dfrac{1}{3}$.
   (c) Donner alors la valeur de $P(X_n = 1)$ en fonction de n.
2. En procédant de la même manière qu'à la question précédente, donner la valeur de $P(X_n = 2)$, $P(X_n = 3)$ et de $P(X_n = 4)$ en fonction de n.
3. Déterminer l'espérance de X_n.

Exercice 7 (★★)
Un mobile se déplace aléatoirement par "sauts" sur les points à coordonnées entières et positives ou nulles d'un axe d'origine O (d'abscisse égale à 0). Le voyage est organisé comme suit :

- Le mobile est en O à l'instant 0.
- Si le mobile est sur le point d'abscisse k ($k \in \mathbb{N}$) à l'instant n ($n \in \mathbb{N}$), alors à l'instant $n+1$, il sera, soit sur le point d'abscisse $(k+1)$ avec la probabilité $\frac{2}{3}$, soit en O avec la probabilité $\frac{1}{3}$.

On appelle X_n la variable aléatoire égale à l'abscisse du mobile à l'instant n. On a donc $X_0 = 0$.

1. Donner la loi de X_1.
2. Montrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que $X_n(\Omega) = [\![0, n]\!]$.
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   (a) En considérant le système complet d'événements $(X_{n-1} = i)_{0 \leq i \leq n-1}$, déterminer la valeur de la probabilité $P(X_n = 0)$.
   (b) Soit $k \in [\![1, n]\!]$. Toujours avec le même système complet d'événements $(X_{n-1} = i)_{0 \leq i \leq n-1}$, montrer que :
   $$P(X_n = k) = \frac{2}{3} P(X_{n-1} = k-1).$$
4. (a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ E(X_n) = \frac{2}{3} E(X_{n-1}) + \frac{2}{3}$.
   (b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, déterminer $E(X_n)$ en fonction de n.

Exercice 8 (★)
Soit X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ dont la loi est donnée par :

$$X(\Omega) = \mathbb{N}^* \setminus \{1; 2\} \qquad \text{et} \qquad \forall k \in X(\Omega),\ P(X = k) = \frac{1}{2^{k-2}}.$$

1. Vérifier que l'on définit ainsi une loi de probabilité.
2. Calculer l'espérance de X.

Exercice 9 (★★)
Soit X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ dont la loi est donnée par :

$$X(\Omega) = \mathbb{N} \setminus \{0, 1\} \qquad \text{et} \qquad \forall k \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\},\ P(X = k) = \frac{4}{3(k^2 - 1)}.$$

1. (a) Montrer que l'on définit bien ainsi une loi de probabilité.
   On pourra remarquer que $\frac{1}{k^2 - 1} = \frac{1}{2(k-1)} - \frac{1}{2(k+1)}$.
   (b) Calculer $P(X^2 \leq 4X - 3)$.
   (c) Calculer $P(\{X \text{ est paire}\})$.
2. Montrer que X n'admet pas d'espérance.

Exercice 10 (★★)

Soit X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ dont la loi est donnée par :

$$X(\Omega) = \mathbb{N}^* \qquad \text{et} \qquad \forall k \in \mathbb{N}^*,\ P(X = k) = \frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2}.$$

1. Montrer que l'on définit bien ainsi une loi de probabilité.
2. Montrer que X possède une espérance et que $E(X) = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$.
3. X admet-elle une variance ?

Exercice 11 (★★)

Soit $\lambda \in]0, +\infty[$ et X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ dont la loi est donnée par :

$$X(\Omega) = \mathbb{N}^* \qquad \text{et} \qquad \forall k \in \mathbb{N}^*,\ P(X = k) = \frac{\lambda}{k(k+1)(k+2)}.$$

1. (a) Déterminer des réels a, b et c tels que : $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \dfrac{1}{k(k+1)(k+2)} = \dfrac{a}{k} + \dfrac{b}{k+1} + \dfrac{c}{k+2}$.

   (b) En déduire la valeur de λ pour qu'on ait ainsi défini une loi de probabilité.
2. Montrer que X admet une espérance et donner sa valeur.
3. Justifier que X n'admet pas de variance.

Exercice 12 (★★)

Une urne contient initialement une boule blanche et une boule rouge. On effectue une suite de tirage au hasard dans l'urne. A chaque tirage, la boule tirée est remise dans l'urne et on y ajoute une boule rouge supplémentaire. On procède ainsi jusqu'à l'obtention de la première boule rouge et on note X la variable aléatoire égale au rang d'apparition de celle-ci.

1. Déterminer la loi de X.
2. Vérifier que : $\displaystyle\sum_{k \in X(\Omega)} P(X = k) = 1$.
3. (a) Calculer $E(X+1)$. En déduire $E(X)$.

   (b) Calculer $E((X+1)(X-1))$. En déduire que : $V(X) = e(3-e)$.

Exercice 13 (★★)

Une urne contient initialement deux boules rouges et une boule bleue indiscernables au toucher. On tire une boule de l'urne, puis :

- Si la boule tirée est bleue, on la remet dans l'urne.
- Si la boule tirée est rouge, on ne la remet pas dans l'urne mais on remet une boule bleue dans l'urne à sa place.

On effectue une succession illimitée de tirages. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note Y_n la variable aléatoire égale au nombre de boules rouges présentes dans l'urne à l'issue du n-ième tirage.

1. Donner la loi de Y_1.

2. Quelles sont les valeurs possibles de Y_n dans le cas où $n \geq 2$?

3. Calculer pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P(Y_n = 2)$.

4. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = P(Y_n = 1)$.

   (a) Rappeler la valeur de u_1 et montrer que $u_2 = \dfrac{2}{3}$.

   (b) Montrer que pour tout entier $n \geq 2$, $u_{n+1} = \dfrac{2}{3}u_n + \dfrac{2}{3^{n+1}}$.
   Cette relation reste-t-elle valable lorsque $n = 1$?

   (c) On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = u_n + \dfrac{2}{3^n}$.
   Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est géométrique et en déduire v_n puis u_n en fonction de n.

   (d) Déduire des résultats précédents $P(Y_n = 0)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

5. Calculer l'espérance de Y_n.

6. On note Z la variable aléatoire égale au numéro du tirage amenant la dernière boule rouge.

   (a) Donner $Z(\Omega)$.

   (b) Soit $k \geq 2$. Exprimer l'événement $(Z = k)$ à l'aide des variables Y_k et Y_{k-1}.

   (c) En déduire la loi de Z.

Exercice 14 (★★)

Soit X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$, à valeurs dans $\mathbb{N}$ et admettant une espérance.

1. Pour tout entier k, donner une relation liant $P(X = k)$, $P(X > k)$ et $P(X > k - 1)$.

2. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} kP(X = k) = \sum_{k=0}^{n-1} P(X > k) - nP(X > n)$.

3. Montrer que pour tout $n \geq 1$, $nP(X > n) \leq \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} kP(X = k)$.

4. En déduire que : $E(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} P(X > k)$.

Lois discrètes usuelles

Exercice 15 (★)

Dans chacune des situations suivantes, dites si la variable aléatoire X suit une loi usuelle. Si oui, expliciter la loi, son espérance et sa variance.

1. Un dé équilibré possède deux faces blanches et quatre faces noires. On lance une fois le dé et si on obtient une face blanche alors $X = 1$ et sinon $X = 0$.

2. Un dé équilibré possède deux faces blanches et quatre faces noires. On lance 10 fois le dé et on note X le nombre de faces blanches obtenues.

3. Un dé équilibré possède deux faces blanches et quatre faces noires. On lance le dé jusqu'à obtenir pour la première fois une face noire et on note X le nombre de tirages effectuées.

4. Une urne contient 2 boules blanches et 2 boules noires. On effectue 3 tirages sans remise et on note X le nombre de boules blanches obtenues.

5. Une urne contient 2 boules blanches et 2 boules noires. On effectue 3 tirages avec remise et on note X le nombre de boules blanches obtenues.

6. Un sac contient 5 jetons numérotés de 1 à 5. On tire un jeton au hasard et on note X le numéro du jeton tiré.

7. Un sac contient 5 jetons numérotés de 1 à 5. On effectue des tirages avec remise indéfiniment et si on n'obtient jamais le jeton numéro 1 alors $X = 0$ et sinon $X = 1$.

8. Un sac contient 5 jetons numérotés de 1 à 5. On effectue des tirages avec remise jusqu'à obtenir pour la première fois le jeton numéro 1 et on note X le nombre de tirages effectuées.

Exercice 16 (★)

On effectue une succession infinie de lancers d'un dé équilibré.

1. On note X la variable aléatoire égale au rang d'apparition de premier 1 obtenu.

   Déterminer la loi de X, son espérance et sa variance.

2. On note Y_k la variable aléatoire égale au nombre de 1 obtenus au cours des k premiers lancers.

   Déterminer la loi de Y_k, son espérance et sa variance.

3. On note Z_n la variable aléatoire égale au rang d'apparition du n-ième 1 obtenu.

   (a) Pour tout $k \geq n$, exprimer l'événement $(Z_n = k)$ à l'aide de la variable aléatoire Y_{k-1} et de l'événement A_k : "obtenir le numéro 1 au k-ième lancer"

   (b) En déduire la loi de Z_n.

Exercice 17 (★★)

Une urne contient n jetons numérotés de 1 à n. On effectue des tirages successifs d'un jeton avec remise. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires pour obtenir pour la première fois deux numéros distincts.

On note A_i l'événement : "le jeton numéro i est obtenu au premier tirage".

1. Calculer $P_{A_i}(X = k)$.

2. En appliquant la formule des probabilités totales, déterminer la loi de X.

3. Déterminer la loi de $Y = X - 1$. La reconnaître et en déduire sans calculs $E(X)$ et $V(X)$.

Exercice 18 (★★)

On désigne par a un réel strictement positif et on considère une variable aléatoire X définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ telle que :

$$X(\Omega) = \mathbb{N}^* \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}^*,\ P(X = n+1) = \frac{a}{n} P(X = n).$$

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = (n-1)! P(X = n)$.

   Déterminer l'expression de u_n en fonction de a, n et $P(X = 1)$.

2. Déterminer $P(X = 1)$, puis donner la loi de X.

3. On pose $Y = X - 1$.

   Reconnaître la loi de Y, donner $E(Y)$ et $V(Y)$ et en déduire $E(X)$ et $V(X)$.

Exercice 19 (★)

1. Soit $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$. Calculer l'espérance de $Y = (-1)^X$.
2. Soit $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$. Calculer l'espérance de $Y = \dfrac{1}{X+1}$.

Exercice 20 (★★)

Soit X une variable aléatoire suivant la loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$. On pose $Y = \left\lfloor \dfrac{X+1}{2} \right\rfloor$.

1. Montrer que Y suit une loi géométrique de paramètre $q = p(2-p)$.
2. En déduire son espérance et sa variance.

Exercice 21 (★)

Le but de cette exercice est d'obtenir les formules de l'espérance et de la variance de $X \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket a, b \rrbracket)$, avec a et b deux entiers tels que $a < b$.

1. On pose $Y = X - a + 1$. Donner le support $Y(\Omega)$ de la variable aléatoire Y, puis reconnaitre la loi de Y.
2. En déduire l'espérance et la variance de Y puis celles de X.

Exercice 22 (★★)

On effectue une suite de tirages avec remise dans une urne contenant des boules blanches en proportion $p \in]0,1[$ et des boules noires en proportion $q = 1 - p$.
Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on désigne par X_k la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches obtenues lors des k premiers tirages et on note B_k l'événement "on obtient une boule blanche au k-ième tirage".
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note Y_n la variable aléatoire égale au numéro du tirage où l'on obtient la n-ième boule blanche.

1. Reconnaître la loi de X_k.
2. (a) Déterminer $Y_n(\Omega)$.
   (b) Pour tout $i \in Y_n(\Omega)$, écrire l'événement $(Y_n = i)$ à l'aide de la variable aléatoire X_{i-1} et de l'événement B_i.
   (c) En déduire la loi de Y_n.
   (d) Montrer que Y_n possède une espérance et la déterminer.

On pourra utiliser que, si $x \in]0,1[$, alors la série $\sum_{i \geq n} \binom{i}{n} x^{i-n}$ converge et $\sum_{i=n}^{+\infty} \binom{i}{n} x^{i-n} = \dfrac{1}{(1-x)^{n+1}}$.

Exercice 23 (★★★)

Soient X et Y des variables aléatoires indépendantes définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ suivant toutes les deux une loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$.

1. Déterminer la probabilité que la matrice $\begin{pmatrix} X & X+Y \\ 0 & Y \end{pmatrix}$ soit inversible.
2. Déterminer la probabilité que la matrice $\begin{pmatrix} X & X+Y \\ 0 & Y \end{pmatrix}$ soit diagonalisable.

Exercice 24 (★★★)
Une urne contient initialement une boule blanche et une boule rouge.
On effectue des tirages successifs d'une boule dans l'urne selon le protocole suivant : après chaque tirage, la boule tirée est remise dans l'urne puis on rajoute dans l'urne, avant le tirage suivant, une boule de la couleur de la boule que l'on vient de tirée.
Pour tout entier naturel n, on note X_n la variable aléatoire égale au nombre de boule blanche obtenues au cours des n tirages.
Enfin, pour tout entier $k \geq 1$, on pose B_k (resp. R_k) l'événement : "obtenir une boule blanche (resp. rouge) à la k-ième pioche".

1. Loi de X_2
   (a) Pour $k \in \{0, 1, 2\}$, exprimer l'évènement $(X_2 = k)$ à l'aide d'évènements B_k et R_k.
   (b) Déterminer la loi, l'espérance et la variance de X_2.
2. Loi de X_3
   (a) Calculer $P(X_3 = 0)$ et $P(X_3 = 3)$.
   (b) Avec le système complet d'évènements $(X_2 = 0)$, $(X_2 = 1)$, $(X_2 = 2)$, calculer $P(X_3 = 1)$.
   (c) En déduire $P(X_3 = 2)$.
3. Loi de X_n lorsque $n \geq 2$
   (a) Expliciter $X_n(\Omega)$ et calculer $P(X_n = 0)$.
   (b) Soit $k \in [\![1, n-1]\!]$. En introduisant le système complet d'événements $(X_{n-1} = i)_{0 \leq i \leq n-1}$, montrer que :
   $$P(X_n = k) = P(X_{n-1} = k-1)P_{(X_{n-1}=k-1)}(X_n = k) + P(X_{n-1} = k)P_{(X_{n-1}=k)}(X_n = k)$$
   (c) Calculer soigneusement $P_{(X_{n-1}=k-1)}(X_n = k)$ et $P_{(X_{n-1}=k)}(X_n = k)$.
   (d) Montrer par récurrence sur $n \geq 2$ que : $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $P(X_n = k) = \dfrac{1}{n+1}$.
   (e) Donner l'espérance et la variance de X_n.
