

Étude locale de fonctions

Exercice 1 (★)

Déterminer si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses :

(1) $x^2 \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o(e^x)$	(2) $x^2 \underset{x \rightarrow -\infty}{=} o(e^x)$	(3) $\ln(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} o(x)$
(4) $\ln(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o(e^x)$	(5) $\ln(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} o\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$	(6) $\frac{1}{e^x} \underset{x \rightarrow 0}{=} o\left(\frac{1}{x}\right)$
(7) $e^{x^2} \underset{x \rightarrow -\infty}{=} o(x^4)$	(8) $\frac{1}{x^2} \underset{x \rightarrow 0}{=} o\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$	(9) $\ln(\ln(x)) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o(\ln(x))$

Exercice 2 (★)

Déterminer un équivalent simple puis la limite des fonctions suivantes aux points indiqués :

$f_1(x) = \frac{12x^2 + 5x + 3}{x^3 - 2x + 1}$ en $+\infty$, 0 et $-\infty$,	$f_2(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ en $+\infty$ et $-\infty$,
$f_3(x) = e^x - 2\ln(x) + 7x^2$ en $+\infty$, 1 et 0,	$f_4(x) = \frac{e^x - e^{2x} + x^2}{\sqrt{x^2 + 1}}$ en $+\infty$ et $-\infty$,
$f_5(x) = \ln(1 + x^2)$ en 0 et $+\infty$,	$f_6(x) = \frac{\ln(x)}{x - 1}$ en $+\infty$, en 1 et en 0,
$f_7(x) = \left(\frac{x - 1}{x + 1}\right)^x$ en $+\infty$,	$f_8(x) = \ln\left(\frac{2x^2 - x + 1}{2x^2 + 3}\right)$ en $+\infty$.

Exercice 3 (★)

Écrire le développement limité à l'ordre 2 des fonctions suivantes aux points indiqués :

$f_1(x) = e^x - \ln(1 + x)$ en 0,	$f_2(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x}}$ en 0,	$f_3(x) = \frac{e^x}{1-x}$ en 0,
$f_4(x) = \ln(2 + x)$ en 0,	$f_5(x) = \frac{\ln(x)}{x}$ en 1,	$f_6(x) = \frac{1}{2-x}$ en 1.

Exercice 4 (★)

En utilisant les développements limités, déterminer un équivalent simple puis la limite des fonctions suivantes en 0 :

$f_1(x) = \frac{e^x - \sqrt{1+2x}}{x}$,	$f_2(x) = \frac{x \ln(1+x) - x^2}{e^x - x - 1}$,	$f_3(x) = \frac{1}{x(e^x - 1)} - \frac{1}{x^2}$.
$f_4(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{\ln(1+x)}$,	$f_5(x) = \frac{\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2}}{2x}$,	$f_6(x) = \frac{e^x - 1 - xe^x}{(\ln(1+x))^2}$.

Exercice 5 (★★)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(1+x^2)}{x^2} & \text{si } x \neq 0, \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

1. Démontrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.
2. Démontrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et donner l'expression de f' .
3. Déterminer la limite en $+\infty$ de f .

Exercice 6 (★★)

On définit la fonction f sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{1 - e^{-x}} & \text{si } x \neq 0, \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

1. Démontrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.
 2. Démontrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$.
 3. Démontrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
 4. Étudier la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = 1 - (1+x)e^{-x}$.
 5. Démontrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans J , où J est un intervalle à déterminer.
-

Exercice 7 (★★)

Soit f la fonction numérique définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{(x+2)(x-1)}{x \ln(x)} & \text{si } x \neq 1, \\ 3 & \text{si } x = 1. \end{cases}$$

1. Montrer que f est continue sur $]0, +\infty[$.
 2. Montrer que f est dérivable en 1 et que $f'(1) = -\frac{1}{2}$.
-

Exercice 8 (★)

Soit f la fonction définie sur $] -1, 1[$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \sqrt{1-x^2}}{x^2} & \text{si } x \neq 0, \\ \frac{1}{2} & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

1. Montrer que f est continue en 0.
 2. Montrer que f dérivable en 0 et préciser $f'(0)$.
 3. (a) A l'aide du développement limité à l'ordre 2 en 0 de f , donner l'équation de la tangente au point d'abscisse 0 de $\mathcal{C}_f$, la courbe représentative de f .
(b) Étudier la position relative de $\mathcal{C}_f$ par rapport à sa tangente au voisinage de 0.
-

Exercice 9 (★★★)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$f(x) = \begin{cases} x^{1+1/x} & \text{si } x > 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

1. (a) Démontrer que f est continue en 0.
(b) Étudier la dérivabilité de f en 0.
2. (a) Démontrer que pour tout $x > 0$, $\ln(x) \leq x + 1$.
(b) Calculer $f'(x)$ pour $x > 0$ et déterminer son signe et les variations de f .

3. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
4. (a) Démontrer que le développement limité à l'ordre 2 de f en 1 est :

$$f(x) = 1 + 2(x - 1) + o((x - 1)^2).$$

- (b) En déduire l'équation de la tangente T à la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de f en 1.
- (c) On admet que le développement limité à l'ordre 3 de f en 1 est :

$$f(x) = 1 + 2(x - 1) - \frac{1}{2}(x - 1)^3 + o((x - 1)^3).$$

Préciser la position relative de $\mathcal{C}_f$ par rapport à T au voisinage de 1.

- (d) Tracer $\mathcal{C}_f$ et T dans un repère orthonormé.

Exercice 10 (★★)

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} xe^{-1/x} & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

1. (a) Montrer que f est continue à droite en 0.
(b) Montrer que f est dérivable à droite en 0.
2. Justifier que f n'est pas continue à gauche en 0. Est-elle dérivable à gauche en 0 ?
3. Déterminer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
4. (a) A l'aide du développement limité de e^u lorsque u est au voisinage de 0, et d'un changement de variable approprié, montrer que :

$$f(x) \underset{x \rightarrow \pm\infty}{=} x - 1 + \frac{1}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right).$$

- (b) En déduire qu'au voisinage de $\pm\infty$, la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de f admet une asymptote oblique dont on donnera l'équation.
- (c) Déterminer la position relative de $\mathcal{C}_f$ par rapport à son asymptote au voisinage de $+\infty$ et de $-\infty$.

Exercice 11 (★★)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par : $f(x) = \frac{x\sqrt{x^2+1}}{x-1}$.

1. (a) Donner le développement limité de f à l'ordre 2 au voisinage de 0.
(b) En déduire la tangente à la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de f en 0 et leurs positions relatives.
2. Montrer que $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} x + 1 + \frac{3}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$. Que dire de $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$?

Exercice 12 (★★)

Déterminer la nature de la série $\sum u_n$ lorsque :

$$(1) u_n = \frac{1}{n} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right), \quad (2) u_n = n \ln\left(1 - \frac{2}{n}\right) + 2, \quad (3) u_n = \frac{e^{1/n} - 1 - 1/n}{\ln(1 + 1/\sqrt{n})}.$$

Exercice 13 (★★★)

On considère la fonction notée ch définie par : $\forall x \in \mathbb{R}, ch(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$.

On considère également la suite (u_n) définie par son premier terme $u_0 = 1$ et par la relation de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{u_n}{ch(u_n)}$.

1. Étudier la fonction ch et dresser son tableau de variation.
2. Donner le développement limité à l'ordre 2 de $ch(x)$ lorsque x est au voisinage de 0.
3. (a) Montrer que la suite (u_n) est strictement positive et strictement décroissante.
(b) En déduire que (u_n) est convergente et donner sa limite.
4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $v_n = \frac{u_{n+1}}{u_n} - 1$.
(a) Montrer que la suite (v_n) est strictement négative.
(b) Montrer que (v_n) est convergente de limite nulle.
(c) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, simplifier $\sum_{k=0}^{n-1} \ln(1 + v_k)$.

En déduire que la série de terme général v_n est divergente.

5. Montrer que : $v_n \sim -\frac{u_n^2}{2}$. En déduire que la série de terme général u_n^2 est divergente.

Exercice 14 (★★★)

On considère la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0, \\ \frac{x}{\ln(1+x)} & \text{si } x \in]0; +\infty[. \end{cases}$$

On considère également la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par : $u_0 = e$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$.

1. (a) Montrer que f est continue sur $[0; +\infty[$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0; +\infty[$.
(b) Prouver que f est dérivable en 0 et déterminer la valeur de $f'(0)$.
(c) Donner le développement limité à l'ordre 2 au voisinage de 0 de $\ln(1+x) - \frac{x}{1+x}$ puis déterminer un équivalent de $f'(x)$ lorsque x tend vers 0.
(d) En déduire que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0; +\infty[$.
2. (a) Déterminer le signe de f sur $[0; +\infty[$.
(b) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n existe et $u_n > 0$.
3. (a) Établir que : $\forall x \geq e-1, f(x) \leq x$ et $(x+1)\ln(x+1) \geq (x+1)$.
(b) En déduire que : $\forall x \geq e-1, f'(x) \geq 0$.
(c) Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, e-1 \leq u_n$.
(d) Établir que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et préciser la valeur de sa limite.