TD 8

Espaces vectoriels

Espaces et sous-espaces vectoriels

Exercice 1 (★)

Justifier que les ensembles suivants ne sont pas des espaces vectoriels :

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 1\} \qquad B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq 0\}$$

$$C = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \mid a^2 + c^2 = b \right\} \qquad D = \{P \in \mathbb{R}[X] \mid \deg(P) = 3\}$$

$$E = \left\{ (u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \lim_{n \to +\infty} u_n = 1 \right\} \qquad F = \{f \in \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \mid f \text{ est croissante}\}$$

Exercice 2 (★)

Montrer que les ensembles suivants sont des espaces vectoriels :

$$A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid -x + 3y + z = 0\} \qquad B = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \mid a + d = c + b \right\}$$

$$C = \{M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \mid M \text{ est symétrique}\} \qquad D = \{P \in \mathbb{R}[X] \mid P(1) = P'(1) = 0\}$$

$$E = \left\{ (u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \lim_{n \to +\infty} u_n = 0 \right\} \qquad F = \left\{ f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R}) \mid f - 2f' = 0 \right\}$$

Exercice 3 (★)

Écrire les ensembles suivants sous forme de sous-espaces vectoriels engendrés :

$$A = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x + y = 0 \right\} \qquad B = \left\{ \begin{pmatrix} a+b & -a \\ b & a-b \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \mid a,b \in \mathbb{R} \right\}$$

$$C = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \mid a + b + c + d = 0 \right\} \qquad D = \left\{ aX^3 + bX \in \mathbb{R}[X] \mid a,b \in \mathbb{R} \right\}$$

Exercice 4 (★)

Dans $\mathbb{R}^3$, on pose $F = Vect((2,1,-1),(0,1,3),(-4,-1,5),(1,1,1))$.
Montrer que : $F = Vect((2,1,-1),(0,1,3))$.

Exercice 5 (★)

Dans $\mathbb{R}^3$, on pose $F = Vect((-4,4,3),(-3,2,1))$ et $G = Vect((-1,2,2),(-1,6,7))$.
Montrer que : $F = G$.

Exercice 6 (★)

On considère les matrices de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 8 & -3 \end{pmatrix}.$$

Montrer que : $Vect(A,B,C,D) = Vect(A,B,C)$.

Familles de vecteurs

Exercice 7 (★)

Les familles de $\mathbb{R}^3$ suivantes sont-elles libres ou liées ?

1. $\mathscr{F}_1 = ((1,1,0),(0,1,1))$.
2. $\mathscr{F}_2 = ((1,1,0),(1,0,1),(2,1,2))$.
3. $\mathscr{F}_3 = ((1,1,-1),(1,-1,1),(-1,1,1),(1,1,1))$.

Exercice 8 (★)

On considère les matrices de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ suivantes :

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad M_2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}, \quad M_3 = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 8 \end{pmatrix}, \quad M_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

1. La famille (M_1, M_2, M_3) est-elle libre ?
2. La famille (M_1, M_2, M_3, M_4) est-elle libre ?

Exercice 9 (★)

On considère les polynômes P, Q, R suivants :

$$P = X^3 + 1,\ Q = -3X^3 + X - 1,\ R = X - 2.$$

Montrer que (P, Q, R) est une famille libre de $\mathbb{R}_3[X]$.

Exercice 10 (★★)

On considère les suites réelles u, v, w définies par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 2^n,\ v_n = 3^n,\ w_n = 4^n.$$

Montrer que (u, v, w) est une famille libre de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Exercice 11 (★★)

On considère les fonctions e_1, e_2, e_3, e_4 définies par :

$$\forall x > 0,\ e_1(x) = x,\ e_2(x) = x^2,\ e_3(x) = x\ln(x),\ e_4(x) = x^2\ln(x).$$

On cherche à montrer que (e_1, e_2, e_3, e_4) est une famille libre de $\mathscr{F}(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$. On considère donc a, b, c, d quatre réels tels que :

$$\forall x > 0,\ ae_1(x) + be_2(x) + ce_3(x) + de_4(x) = 0.$$

1. Montrer que $a + b = 0$.
2. Établir que : $\forall x > 1,\ \dfrac{a}{x\ln(x)} + \dfrac{b}{\ln(x)} + \dfrac{c}{x} + d = 0$. En déduire que $d = 0$.
3. Montrer ensuite que : $\forall x > 0,\ \dfrac{a}{x} + b + \dfrac{c\ln(x)}{x} = 0$. En déduire que $b = 0$.
4. Conclure.

Exercice 12 (★★★)

On note $\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et $\mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions définies et continues sur $\mathbb{R}$, à valeurs réelles.

1. Montrer que $\mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ est un espace vectoriel réel.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$\forall x \in \mathbb{R},\ f_n(x) = e^{nx}.$$
Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la famille $(f_0, f_1, \dots, f_n)$ est libre dans $\mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.
3. En déduire que l'espace vectoriel $\mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ n'est pas de dimension finie.
4. En déduire que l'espace vectoriel $\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ n'est pas de dimension finie.

Remarque. On montrerait de même que :

- L'espace vectoriel $\mathbb{R}[X]$ des polynômes à coefficients réels n'est pas de dimension finie, en remarquant que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la famille $(1, X, X^2, \dots, X^n)$ est libre.
- L'espace vectoriel $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ des suites réelles n'est pas de dimension finie, en remarquant que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, la famille $((1)_{n\in\mathbb{N}}, (2^n)_{n\in\mathbb{N}}, \dots, (p^n)_{n\in\mathbb{N}})$ est libre.

Espaces vectoriels de dimension finie

Exercice 13 (★)

1. On considère les vecteurs de $\mathbb{R}^3$ suivants :
$$u = (-1, 2, 0),\ v = (3, -5, -1),\ w = (0, 1, -2).$$
   (a) Montrer que la famille $\mathscr{B} = (u, v, w)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
   (b) Déterminer les coordonnées de $t = (1, -2, 1)$ dans la base $\mathscr{B}$.
2. On considère les vecteurs de $\mathbb{R}^4$ suivants :
$$u = (1, 2, 3, 4),\ v = (0, 1, -1, 1),\ w = (-1, 1, 0, 2),\ x = (1, -1, 2, 0).$$
   (a) Montrer que la famille $\mathscr{B} = (u, v, w, x)$ est une base de $\mathbb{R}^4$.
   (b) Déterminer les coordonnées de $t = (1, 1, 1, 1)$ dans la base $\mathscr{B}$.

Exercice 14 (★)

On considère les matrices de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ suivantes :
$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},\ M_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ M_4 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que $\mathscr{B} = (M_1, M_2, M_3, M_4)$ est une base de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.
2. Déterminer les coordonnées de la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ dans la base $\mathscr{B}$.
3. Plus généralement, déterminer les coordonnées de $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ dans la base $\mathscr{B}$.

Exercice 15 (★)

On considère les polynômes P, Q, R suivants :

$$P = X - 1,\ Q = X^2 - 1,\ R = X^2 + 1.$$

1. Montrer que la famille $\mathscr{B} = (P, Q, R)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Déterminer les coordonnées du polynôme $S = 3X^2 - 2X + 1$ dans la base $\mathscr{B}$.
3. Plus généralement, déterminer les coordonnées de $T = aX^2 + bX + c$ dans cette base.

Exercice 16 (★)

On considère l'ensemble :

$$F = \left\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 - 2x_2 + x_3 = 0\right\}.$$

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer une famille génératrice de F.
3. En déduire une base $\mathscr{B}$ et la dimension de F.
4. On considère les vecteurs $u = (1, 1, 1)$ et $v = (2, -1, -1)$.
   Déterminer si u et v appartiennent à F et, si c'est le cas, déterminer leurs coordonnées dans la base $\mathscr{B}$.

Exercice 17 (★★)

1. On considère les vecteurs de $\mathbb{R}^4$ suivants :
   $$u = (1, -1, 2, 1),\ v = (2, 1, 0, 1),\ w = (3, 3, -2, 1).$$
   Déterminer une base de $F = Vect(u, v, w)$.
2. On considère l'ensemble :
   $$G = \left\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 = 0 \text{ et } x_1 - x_3 - x_4 = 0\right\}.$$
   Montrer que G est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ et en donner une base.
3. Déterminer une base et la dimension de $F \cap G$.

Exercice 18 (★)

On considère l'ensemble :

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} a+b & a & b \\ a-b & b & a \\ 2a & 2b & 2a-b \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}.$$

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ et donner une famille génératrice de F.
2. En déduire une base et la dimension de F.

Exercice 19 (★)

On associe à tout triplet (x, y, z) de nombres réels la matrice $M(x, y, z)$ définie par :

$$M(x,y,z) = \begin{pmatrix} x & y & z \\ z & x & y \\ y & z & x \end{pmatrix}.$$

La matrice $M(1, 0, 0)$ est la matrice identité I et la matrice $M(0, 1, 0)$ est notée J.

1. Calculer les matrices J^2 et J^3.
2. Établir que l'ensemble E des matrices de la forme $M(x, y, z)$, où (x, y, z) décrit $\mathbb{R}^3$ constitue un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.
3. Montrer que (I, J, J^2) forme une base de E.
4. En deduire que E est stable pour le produit matriciel.

Exercice 20 (★★)

On considère les matrices suivantes de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On note E l'ensemble des matrices carrées d'ordre 2 telles que : $AM = MD$.

1. Vérifier que E est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.
2. Soit $M = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ une matrice de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

   Montrer que M appartient à E si et seulement si $z = 0$ et $y = t$.
3. Montrer que (U, A) est une base de E.
4. L'ensemble E est-il stable par produit matriciel ?

Exercice 21 (★★)

Soit la matrice $K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

On note E l'ensemble des matrices M de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ vérifiant : $MK = KM = M$.

1. (a) Montrer que E est un espace vectoriel.

   (b) Montrer par l'absurde qu'aucune matrice de E n'est inversible.
2. Soit $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ une matrice de E.

   (a) Montrer que $i = g = c = a$, $h = b$ et $f = d$, puis en déduire la forme des matrices de E.

   (b) Retrouver le fait que les matrices de E ne sont pas inversibles.

   (c) Déterminer une base de E et vérifier que $dim(E) = 4$.
3. On considère l'ensemble F des matrices de la forme $M = \begin{pmatrix} x & y & x \\ y & z & y \\ x & y & x \end{pmatrix}$, où $x, y, z \in \mathbb{R}$.

   Vérifier que F est un sous-espace vectoriel de E et donner une base de F.

Exercice 22 (★★)

On considère l'ensemble :

$$F = \left\{ P \in \mathbb{R}_2[X] \mid P - XP' = 0 \right\}.$$

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Déterminer une base et la dimension de F.

Exercice 23 (★★)

On considère l'ensemble :

$$F = \{P \in \mathbb{R}_4[X] \mid P(1) = P'(1) = P''(1) = 0\}.$$

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_4[X]$.
2. Déterminer une base $\mathscr{B}$ et la dimension de F.
3. Montrer que $P = 2X^4 - 5X^3 + 3X^2 + X - 1$ appartient à F et déterminer les coordonnées de P dans la base $\mathscr{B}$.

Exercice 24 (★★)

On considère l'ensemble F défini par :

$$F = \left\{ (u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n \right\}.$$

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
2. On pose : $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = 2^n$ et $w_n = n2^n$. Montrer que la famille (v, w) est libre dans F.
3. Montrer que la famille (v, w) est une base de F et en déduire sa dimension.

Exercice 25 (★★)

On note $E = \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions 2 fois continûment dérivable sur $\mathbb{R}$. On note également F la partie de E définie par :

$$F = \{f \in E \mid f'' = 2f' - f\}.$$

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E.
2. Vérifier que $f : x \mapsto e^x$ et $g : x \mapsto xe^x$ forment une famille libre de F.
3. Montrer que (f, g) est une base de F et en déduire sa dimension.

Matrices de passage

Exercice 26 (★)

Soit $\mathscr{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$ et $\mathscr{C}$ la famille de vecteurs $((1,2),(0,1))$ de $\mathbb{R}^2$.

1. Montrer que la famille $\mathscr{C}$ est une base de $\mathbb{R}^2$.
2. Écrire la matrice de passage P de $\mathscr{B}$ vers $\mathscr{C}$.
3. Donner la matrice de passage de $\mathscr{C}$ vers $\mathscr{B}$.
4. En déduire P^{-1}.

Exercice 27 (★)

Soit $\mathscr{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
On considère la famille $\mathscr{C} = (u, v, w)$, avec $u = (1,0,0)$, $v = (2,2,0)$, $w = (3,3,3)$.

1. Donner la matrice de la famille $\mathscr{C}$ dans la base $\mathscr{B}$.
2. En déduire que $\mathscr{C}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
3. Calculer l'inverse de $P_{\mathscr{B},\mathscr{C}}$.
4. En déduire l'expression des vecteurs de la base canonique par rapport aux vecteurs de $\mathscr{C}$.

Exercice 28 (★★)

Soit E un espace vectoriel muni d'une base $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$.

1. Soient $u_1 = e_1 + e_3$, $u_2 = e_1 - 2e_2$ et $u_3 = e_2 - e_3$.
   Montrer que $\mathscr{C} = (u_1, u_2, u_3)$ est une base de E.
2. Donner la matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{C}$.
3. Calculer l'inverse de $P_{\mathscr{B},\mathscr{C}}$.
4. En déduire l'expression des vecteurs e_1, e_2, e_3 en fonction des vecteurs u_1, u_2, u_3.

Exercice 29 (★★)

Soit E l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 3. On pose :

$$P_0 = (1+X)^3,\ P_1 = X(1+X)^2,\ P_2 = X^2(1+X),\ P_3 = X^3.$$

On note $\mathscr{C} = (P_0, P_1, P_2, P_3)$.

1. Rappeler la base canonique de E, que l'on notera $\mathscr{B}$.
2. Donner la matrice de la famille $\mathscr{C}$ dans la base $\mathscr{B}$.
3. Montrer de deux manières que $\mathscr{C}$ est une base de E.
4. Déterminer la matrice de passage de la base $\mathscr{C}$ à la base $\mathscr{B}$.
5. Soit $Q = 3X^3 + X^2 - 2X + 1$. Déterminer les coordonnées de Q dans la base $\mathscr{C}$.

Exercice 30 (★★★)

On considère $n+1$ réels $a_0, a_1, \dots, a_n$ distincts deux à deux. Pour tout $i \in [\![0, n]\!]$, on pose :

$$L_i(X) = \prod_{k \neq i} \frac{X - a_k}{a_i - a_k} = \frac{X - a_0}{a_i - a_0} \times \dots \times \frac{X - a_{i-1}}{a_i - a_{i-1}} \times \frac{X - a_{i+1}}{a_i - a_{i+1}} \times \dots \times \frac{X - a_n}{a_i - a_n}.$$

1. Pour tout $(i, j) \in [\![0, n]\!]^2$, calculer $L_i(a_j)$. On pourra distinguer les cas $i = j$ et $i \neq j$.
2. Montrer que $\mathscr{B} = (L_0, \dots, L_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
3. Si $P \in \mathbb{R}_n[X]$, exprimer les coordonnées de P dans la base $\mathscr{B}$ en fonction de P.
4. On note $\mathscr{B}' = (1, X, \dots, X^n)$. Écrire la matrice $P_{\mathscr{B}, \mathscr{B}'}$.
5. Montrer que la matrice
$$\begin{pmatrix} 1 & a_0 & \dots & a_0^n \\ 1 & a_1 & \dots & a_1^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n & \dots & a_n^n \end{pmatrix}$$
est inversible si et seulement si les a_i sont deux à deux distincts.

Rang d'une famille de vecteurs

Exercice 31 (★)

Déterminer le rang des familles composées des vecteurs suivants :

1. $u_1 = (1, 0, 2)$, $u_2 = (-1, 2, -1)$, $u_3 = (2, 3, 0)$, $u_4 = (1, 0, -1)$, $u_5 = (2, 1, -1)$ dans $\mathbb{R}^3$.
2. $u_1 = (1, 1, 0, 1)$, $u_2 = (1, -1, 1, 0)$, $u_3 = (2, 0, 1, 1)$, $u_4 = (0, -2, 1, -1)$ dans $\mathbb{R}^4$.
3. $P_1 = X^2 + X - 3$, $P_2 = X^2 - X - 3$, $P_3 = 2X^2 - X - 6$ dans $\mathbb{R}_2[X]$.
4. $M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $M_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $M_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $M_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

Exercice 32 (★)

Dans $\mathbb{R}^3$, on considère les vecteurs $u = (1, 0, 2)$, $v = (1, 1, 2)$, $w = (1, 2, 2)$, $t = (2, 2, 2)$.

1. Montrer que (u, v, w, t) est une famille génératrice de $\mathbb{R}^3$.
2. Extraire de la famille (u, v, w, t) une base de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 33 (★)

Dans $\mathbb{R}_2[X]$, on considère les vecteurs $P = X^2 - X + 1$, $Q = X^2 + 2X + 2$, $R = 2X^2 + 1$, $S = X - 1$.

1. Montrer que (P, Q, R, S) est une famille génératrice de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Extraire de la famille (P, Q, R, S) une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
