TD 9

Couples de variables aléatoires discrètes

Exercice 1 (★)

La loi conjointe du couple (X, Y) est donnée par :

$X \setminus Y$	1	2	3
1	p	0	p
2	p	0	p
3	0	$2p$	0

1. Déterminer p.
2. Déterminer les lois marginales.
3. X et Y sont-elles indépendantes ?
4. Calculer la covariance du couple (X, Y).
5. Calculer $P(X = Y)$ et $P(X < Y)$.
6. Déterminer la loi de $Z = X + Y$.

Exercice 2 (★)

On dispose d'un dé cubique classique équilibré et d'une pièce équilibrée. On lance le dé et on observe son résultat :

- Si celui-ci est un 6, on lance la pièce deux fois.
- Dans tous les autres cas, on lance la pièce une seule fois.

On note X la variable aléatoire égale au résultat du dé et Y la variable aléatoire égale au nombre de piles apparus au cours de cette expérience.

1. Reconnaître la loi de X et donner son espérance et sa variance.
2. Déterminer la loi du couple (X, Y). On donnera cette loi sous forme d'un tableau à double entrée et on justifiera précisément le calcul d'au moins 3 valeurs de ce tableau.
3. En déduire la loi marginale de Y.
4. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?
5. Calculer la covariance de X et Y.

Exercice 3 (★★)

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires discrètes à valeurs de $\mathbb{N}^2$ tel que :

$$\forall (i, j) \in \mathbb{N}^2, \quad P((X = i) \cap (Y = j)) = \frac{(i + j)a^{i+j}}{e \times i! \times j!}.$$

1. Déterminer le réel a pour que la formule précédente définisse une loi de couple.
2. Déterminer les lois marginales de X et Y.

Exercice 4 (★★)

On dispose d'une urne contenant 2 boules blanches et n ($n \in \mathbb{N}^*$) boules noires. On tire les $n+2$ boules de l'urne successivement et sans remise. On note X le rang d'apparition de la première boule blanche tirée et Y le rang d'apparition de la seconde boule blanche tirée.

1. Donner le support de X et Y.
2. Déterminer la loi du couple (X, Y).
3. Vérifier que $\displaystyle\sum_{i\in X(\Omega)} \sum_{j\in Y(\Omega)} P((X = i) \cap (Y = j)) = 1$.
4. Calculer $E(XY)$.

Exercice 5 (★★)

On lance un dé indéfiniment. On note X le nombre de lancers nécessaires pour obtenir le premier 6 et Z le nombre de lancers nécessaires pour obtenir le deuxième 6.

1. Loi du deuxième temps d'attente comme loi marginale :
   (a) Déterminer la loi du couple (X, Z).
   (b) En déduire la loi de Z.
2. Loi du deuxième temps d'attente comme somme de temps d'attentes :

   On note Y la variable aléatoire égale au nombre de lancers nécessaires, après l'obtention du premier 6, pour obtenir le deuxième 6.

   (a) Justifier que X et Y sont indépendantes et donner leurs lois.
   (b) Exprimer Z en fonction de X et de Y.
   (c) Retrouver alors la loi de Z et calculer son espérance et sa variance.

Exercice 6 (★★)

Soit un dé équilibré comprenant 1 face blanche et 5 faces rouges. On lance ce dé indéfiniment et on s'intéresse aux longueurs des séries de B et de R : par exemple, si les lancers donnent les résultats

BBRRRRRRBBBRR...

alors la première série BB est de longueur 2 et la deuxième série $RRRRRR$ est de longueur 6.
Soient X_1 et X_2 les variables aléatoires égales aux longueurs de la première et deuxième série.

1. Déterminer la loi de X_1. Montrer que X_1 admet une espérance et la calculer.
2. Déterminer la loi du couple (X_1, X_2).
3. En déduire la loi de X_2.
4. Montrer que X_1 et X_2 ne sont pas indépendantes.

Exercice 7 (★★)

On dispose de n urnes numérotées de 1 à n. L'urne k contient k boules numérotées de 1 à k. On choisit une des urnes au hasard et on note X la variable aléatoire correspondant au numéro de l'urne choisie. Si $X = k$, on tire au hasard une boule dans l'urne k et on note Y la variable aléatoire correspondant au numéro de la boule choisie.

1. Reconnaître la loi de X puis donner $E(X)$ et $V(X)$.

2. Déterminer la loi conjointe du couple (X, Y).

3. En déduire la loi de Y sous forme d'une somme que l'on ne cherchera pas à calculer.

4. Calculer $E(Y)$.

Exercice 8 (★★)

Une urne contient n boules numérotées de 1 à n. On procède à deux tirages successifs d'une boule selon le processus suivant : au premier tirage, on tire au hasard une boule de l'urne. Si on a, par exemple, obtenu la boule numéro i, on la remet dans l'urne et toutes les boules portant un numéro strictement inférieur à i sont remplacées par un nombre égal de boules portant le numéro i. On procède alors au deuxième tirage. Soient X et Y les variables aléatoires égales aux numéros obtenus respectivement lors du premier et du second tirage.

1. Reconnaître la loi de X et donner son espérance et sa variance.

2. Déterminer la loi conditionnelle de Y sachant $(X = i)$.

3. En déduire la loi marginale de Y.

4. Déterminer l'espérance de Y.

5. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 9 (★)

Soient a et b deux réels tels que $0 < a < 1$ et $0 < b < 1$.
On effectue une suite d'expériences aléatoires consistant à jeter simultanément deux pièces de monnaie notées A et B. On suppose que ces expériences sont indépendantes et qu'à chaque expérience les résultats des deux pièces sont indépendants. On suppose que, lors d'une expérience, la probabilité que la pièce A donne "pile" est a, et que la probabilité que la pièce B donne "pile" est b.
Soit X le nombre d'expériences qu'il faut réaliser avant que la pièce A donne "face" pour la première fois, et Y le nombre d'expériences qu'il faut réaliser avant que la pièce B donne "face" pour la première fois.

1. Reconnaître les lois de X et de Y. Donner $E(X)$ et $E(Y)$.

2. Calculer la probabilité de l'évènement $(X = Y)$.

3. (a) Trouver, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la valeur de $P(X > n)$.
   (b) En déduire la probabilité de l'événement $(X > Y)$.

4. Quelle est la probabilité $P(X \geq Y)$? Interpréter.

Exercice 10 (★★)

On considère une urne contenant une boule blanche, une boule rouge et une boule verte. On effectue indéfiniment des tirages successifs d'une boule dans cette urne avec remise entre deux tirages.
Pour tout entier $n \geq 1$, on note B_n (respectivement R_n, V_n) l'événement "on a tirer une boule blanche (respectivement rouge, verte) au n-ième tirage".
On appelle X (respectivement Y) la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la première blanche (respectivement rouge). On définit alors la variable $D = |X - Y|$ égale au nombre de tirages séparant la sortie de la première blanche et de la première rouge.

1. Déterminer la loi de X. Faire de même pour Y.

2. Soient i et j des entiers naturels non nuls.

(a) Exprimer, l'événement $(X = i) \cap (Y = j)$ à l'aide des événements décrits dans l'énoncé :

(i) lorsque $i < j$, (ii) lorsque $i = j$, (iii) lorsque $i > j$.

(b) En déduire la loi du couple (X, Y).

3. Déterminer $D(\Omega)$.

4. (a) Exprimer l'évènement $(D = 1)$ à l'aide des évènements $(X = i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ et $(Y = j)_{j\in\mathbb{N}^*}$.

   (b) En déduire que : $P(D = 1) = \dfrac{1}{3}$.

5. Soit k un entier naturel non nul. Montrer l'égalité : $P(D = k) = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{2}{3}\right)^{k-1}$.

6. Reconnaître la loi de D et donner son espérance et sa variance.

Exercice 11 (★★)

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3.
Une urne contient une boule noire non numérotée et $n - 1$ boules blanches, dont $n - 2$ portent le numéro 0 et une porte le numéro 1. On extrait ces boules au hasard, une à une, sans remise, jusqu'à l'apparition de la boule noire.
Pour chaque $i \in [\![1, n - 1]\!]$, on note B_i l'événement : "le i-ème tirage donne une boule blanche", on pose $\overline{B_i} = N_i$ et on note X la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la boule noire.

1. Donner l'ensemble $X(\Omega)$ des valeurs que peut prendre la variable X.

2. (a) Pour tout $i \in [\![2, n - 1]\!]$, justifier que : $P_{B_1\cap\ldots\cap B_{i-1}}(B_i) = \dfrac{n-i}{n-i+1}$.

   (b) Utiliser la formule des probabilités composées pour trouver $P(X = k)$, pour tout $k \in X(\Omega)$.

   (c) Reconnaître la loi de X et donner son espérance et sa variance.

3. On note Y la variable aléatoire qui vaut 1 si la boule numérotée 1 a été piochée lors de l'expérience précédente, et qui vaut 0 sinon.

   (a) Pour tout $k \in X(\Omega)$, montrer toujours grâce à la formule des probabilités composées que :

   $$P\Big((X = k) \cap (Y = 0)\Big) = \frac{n-k}{n(n-1)}$$

   (b) En utilisant la formule des probabilités totales, en déduire $P(Y = 0)$.

   (c) Reconnaître la loi de Y et donner son espérance et sa variance.

Exercice 12 (★)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On dispose d'une pièce dont la probabilité de faire "pile" est $p \in]0, 1[$ et de $(n+1)$ urnes numérotées de 0 à n.
Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, l'urne numéro k contient k boules vertes et $(n - k)$ boules rouges.
On considère l'expérience suivante : on lance n fois la pièce, puis on pioche une unique boule dans l'urne dont le numéro correspond au nombre de fois où "pile" a été obtenu. Par exemple, si on a obtenu quatre "piles" au cours de ces n lancers, on pioche dans l'urne numéro 4.
On note X la variable aléatoire correspondant au nombre de "piles"obtenues lors des n lancers et Y la variable aléatoire qui vaut 1 si l'on tire une boule verte et 0 sinon.

1. (a) Reconnaître la loi de X. Donner $E(X)$ et $V(X)$.

   (b) Calculer la valeur de $E(X^2)$.

2. (a) Calculer $P_{(X=0)}(Y=0)$ et $P_{(X=n)}(Y=0)$. X et Y sont-elles indépendantes ?
   (b) Déterminer, pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, $P_{(X=k)}(Y=1)$.
   (c) En déduire que $P(Y=1) = \dfrac{E(X)}{n}$.
   (d) Donner la loi de Y et son espérance.
3. (a) Montrer que $E(XY) = \dfrac{E(X^2)}{n}$.
   (b) En déduire la covariance du couple (X,Y).

Exercice 13 (★★)

Une urne contient des boules blanches en proportion $p \in]0,1[$ et des boules noires en proportion $q = 1-p$. On effectue des tirages successifs avec remise et on s'arrête dès que l'on a obtenu au moins une boule blanche et au moins une boule noire.
On note X la variable aléatoire égale au nombre de tirages effectués, Y la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches obtenues et Z la variable aléatoire égale au nombre de boules noires obtenues.
Ainsi, on peut remarquer que la probabilité de l'événement $(Y=1)\cup(Z=1)$ est égale à 1.
Pour tout entier naturel i non nul, on note B_i l'événement "la i-ième boule tirée est blanche" et N_i l'événement "la i-ième boule tirée est noire".

1. (a) Montrer que, pour tout entier $k \geq 2$, $P(X=k) = qp^{k-1} + pq^{k-1}$.
   (b) Vérifier que $\displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty} P(X=k) = 1$.
   (c) Montrer que la variable aléatoire X possède une espérance et que $E(X) = \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} - 1$.
2. (a) Déterminer, pour tout entier $k \geq 2$, la probabilité $P((X=k)\cap(Y=1))$. On distinguera les cas $k=2$ et $k \geq 3$.
   (b) En déduire que : $P(Y=1) = q(1+p)$.
   (c) Déterminer la loi de la variable aléatoire Y.

On admet que l'espérance de Y existe et que l'on a $E(Y) = \dfrac{1}{q}(1-p-p^2)$.

3. Donner la loi de Z, ainsi que son espérance.
4. Montrer que les variables aléatoires $Y \cdot Z$ et $X-1$ sont égales.
5. Montrer que le couple (Y,Z) admet une covariance et exprimer $Cov(Y,Z)$ en fonction de $E(X)$, $E(Y)$ et $E(Z)$.

Exercice 14 (★★)

Un individu joue avec une pièce truquée, pour laquelle la probabilité d'obtenir pile est $p \in]0,1[$, de la façon suivante :

- Il lance la pièce jusqu'à obtenir pile pour la première fois. On note N la variable aléatoire égale au nombre de lancers nécessaires.
- Si n lancers ont été nécessaires pour obtenir pour la première fois pile, alors il relance n fois sa pièce. On note alors X le nombre de piles obtenus au cours de ces lancers.

On admet que, pour tout $x \in]-1,1[$, $\displaystyle\sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} x^n = \frac{x^k}{(1-x)^{k+1}}$ et on pourra noter $q = 1-p$.

1. (a) Déterminer la loi de N.
   (b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer la loi conditionnelle à $(N = n)$ de X.
   (c) En déduire $P(X = 0)$ et, pour tout $k \geq 1$, $P(X = k)$.
2. On considère B et G deux variables aléatoire indépendantes suivant respectivement une loi de Bernoulli $\mathcal{B}(1, p')$ et une loi géométrique $\mathcal{G}(p')$.
   (a) Déterminer la loi de la variable aléatoire BG.
   (b) Montrer qu'il existe p' (à déterminer) tel que X a la même loi que la variable BG.
   (c) En déduire $E(X)$.

Exercice 15 (★★)

Le nombre N de têtards issus des oeufs pondus en mars et avril d'une année par les grenouilles vertes d'un étang suit une loi de Poisson de paramètre λ.
Ces têtards sont soumis à des prédateurs nombreux et voraces (poissons, larves de libellules...). Chacun d'entre eux a la probabilité p, hélas très faible, de parvenir à son développement complet. Ces têtards se développent ou sont dévorés de façon indépendante.
On note X le nombre de têtards qui parviennent à leur développement complet et se transforment ainsi à l'automne en une mignonne petite grenouille verte, et Y le nombre de ceux qui meurent avant. On a ainsi $N = X + Y$.

1. Déterminer pour tout couple (k, i) d'entiers naturels, la probabilité conditionnelle $P_{(N=k)}(X = i)$.
   On distinguera les cas $i \leq k$ et $i > k$.
2. En déduire que X suit une loi de Poisson de paramètre λp.
3. Déterminer la loi de la variable aléatoire Y.
4. Pour tout $(i, j) \in \mathbb{N}^2$, calculer $P((X = i) \cap (Y = j))$.
5. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 16 (★★)

Une secrétaire effectue n appels téléphoniques vers n correspondants distincts ($n \geq 2$). On admet que les correspondants répondent à tout message de façon indépendante et avec la probabilité $p \in]0, 1[$.
On note X le nombre de correspondants obtenus lors de ces n appels.
La secrétaire appelle une deuxième fois chacun des $n - X$ correspondants qu'elle n'a pas obtenus la première fois. On note Y le nombre de correspondants obtenus dans la deuxième série d'appels et $Z = X + Y$ le nombre total de correspondants obtenus.

1. Donner la loi de X, son espérance et sa variance.
2. Déterminer $Z(\Omega)$.
3. Calculer $P(Z = 0)$ et montrer que $P(Z = 1) = npq^{2n-2}(1 + q)$, où $q = 1 - p$.
4. Calculer $P_{(X=i)}(Y = j)$ pour tous $i \in [\![0, n]\!]$ et $j \in [\![0, n - i]\!]$.
5. Justifier que $P(Z = k) = \displaystyle\sum_{i=0}^{k} P((X = i) \cap (Y = k - i))$.
6. Après avoir vérifié que $\binom{n}{i}\binom{n-i}{k-i} = \binom{n}{k}\binom{k}{i}$, montrer que Z suit une loi binomiale de paramètres n et $p(1 + q)$.

Exercice 17 (★)

On considère deux variables aléatoires indépendantes X et Y suivant toutes les deux la même loi binomiale de paramètres n et p.

1. Donner la loi de $X+Y$.
2. Calculer $P(X+Y=n)$ de deux façons différentes.
3. En déduire que $\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}^2 = \binom{2n}{n}$.

Exercice 18 (★★★)

Soient X, Y et Z trois variables aléatoires mutuellement indépendantes et définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$. On suppose que X, Y et Z suivent la même loi $\mathcal{U}(\llbracket 1, n \rrbracket)$, où $n \in \mathbb{N}^*$.

1. On pose $S = X + Y$.
   (a) Montrer que : $\forall k \in \llbracket 2, n+1 \rrbracket$, $P(S=k) = \dfrac{k-1}{n^2}$.
   (b) Montrer que : $\forall k \in \llbracket n+2, 2n \rrbracket$, $P(S=k) = \dfrac{2n-k+1}{n^2}$.
2. (a) En considérant le système complet d'évènements $(Z=k)_{k\in\llbracket 1,n \rrbracket}$, montrer que :
   $$P(X+Y=Z) = \frac{n-1}{2n^2}.$$
   (b) Montrer que la variable aléatoire $T = n+1-Z$ suit la loi $\mathcal{U}(\llbracket 1, n \rrbracket)$.
   (c) En faisant intervenir la variable T, déterminer la probabilité $P(X+Y+Z=n+1)$.

Exercice 19 (★★)

Soit $p \in]0,1[$ et $q = 1-p$. Considérons X et Y deux variables aléatoires indépendantes définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ et suivant toutes les deux une loi géométrique de paramètre p.

1. Soit $k \in \mathbb{N}$. Calculer $P(X \leq k)$ et $P(X > k)$.
2. On pose $Z = max(X, Y)$.
   (a) Expliciter $Z(\Omega)$.
   (b) Soit $k \in \mathbb{N}$. Calculer $P(Z \leq k)$.
   (c) Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $P(Z=k) = P(Z \leq k) - P(Z \leq k-1)$.
   (d) En déduire $P(Z=k)$.
3. On pose $T = min(X, Y)$.
   (a) Expliciter $T(\Omega)$.
   (b) Soit $k \in \mathbb{N}$. Calculer $P(T > k)$.
   (c) En déduire $P(T=k)$.
   (d) Reconnaître la loi de T.

Exercice 20 (★)

On considère n personnes ($n \neq 0$) qui se répartissent au hasard dans trois hôtels H_1, H_2 et H_3.
Pour tout $i \in [\![1,3]\!]$, on note X_i la variable aléatoire égale au nombre de personnes ayant choisi l'hôtel H_i.

1. Déterminer la loi des trois variables aléatoires X_1, X_2 et X_3, leurs espérances et leurs variances.
2. Déterminer la loi de $X_1 + X_2$, son espérance et sa variance.
3. Calculer la covariance de X_1 et X_2 puis leur coefficient de corrélation linéaire.

Exercice 21 (★★)

Soit $(X_i)_{i\geq 1}$ une suite de variable aléatoire de Bernoulli mutuellement indépendantes et de même paramètre p. Pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, on pose $Y_i = X_i X_{i+1}$.

1. Déterminer la loi de Y_i.
2. Pour tout $i \neq j$, étudier l'indépendance de Y_i et Y_j.
3. Soit $S_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} Y_i$. Calculer l'espérance et la variance de S_n.

Exercice 22 (★★)

On dit qu'une variable aléatoire X suit une loi binomiale négative de paramètres n et p si :

$$X(\Omega) = [\![n, +\infty[\![\quad \text{et} \quad \forall k \geq n,\ P(X = k) = \binom{k-1}{n-1} p^n (1-p)^{k-n}.$$

Soient $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires discrètes indépendantes suivant toutes une loi géométrique de paramètre p.

1. Montrer que, pour tout $k \geq n+1$, on a : $\displaystyle\sum_{i=n}^{k-1} \binom{i-1}{n-1} = \binom{k-1}{n}$.
2. En déduire que $X_1 + \dots + X_n$ suit une loi binomiale négative de paramètres n et p.
3. Déduire de la question précédente l'espérance et la variance d'une loi binomiale négative de paramètres n et p.

Exercice 23 (★★)

On considère $n \geq 2$ variables aléatoires $X_1, \dots, X_n$ indépendantes et suivant toutes la loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$.
On pose $I_n = \min(X_1, \dots, X_n)$ et $S_n = \max(X_1, \dots, X_n)$.

1. Montrer que pour tout $i \in [\![1,n]\!]$ et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a : $P(X_i > k) = (1-p)^k$.
2. (a) Déterminer, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, la probabilité $P(I_n > k)$, puis en déduire la loi de I_n.
   (b) En déduire l'espérance de I_n.
3. (a) Déterminer pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, la probabilité $P(S_n \leq k)$, puis en déduire la loi de S_n.
   (b) En déduire, en utilisant la formule du binôme, que : $E(S_n) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} \frac{(-1)^{i-1}}{1-q^i}$.
