

Préparer la rentrée en Mathématiques, à l'intention des futurs MP2I

1	Calculs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.	2
1.1	Fractions	2
1.2	Puissances	2
1.3	Racines carrées	3
1.4	Calcul littéral	4
2	Fonctions réelles d'une variable réelle	4
2.1	Fonctions polynômiales des premier et second degrés	4
2.2	Fonctions exponentielle et logarithme	6
2.3	Domaine de définition d'une fonction	6
2.4	Dérivation	7
2.5	Primitives	7

Bienvenue dans la classe de MP2I du lycée Franklin Roosevelt !

Ce document a pour but de vous aider à revoir et à approfondir les techniques calculatoires que vous devriez maîtriser à la fin de votre année de terminale.

C'est effectivement en travaillant votre rapidité et vos réflexes en calculs que vous pourrez prendre de l'avance sur le travail qui vous attend l'année prochaine. Et pour acquérir ces réflexes et ces méthodes, un seul mot d'ordre : l'entraînement !

Ceci est d'autant plus important que la calculatrice est la plupart du temps interdite lors des épreuves écrites et orales des concours. Apprenez donc à vous en passer.

Chaque notion travaillée est précédée de rappels de cours. Ce devoir est à faire **obligatoirement**, de manière détaillée **sur feuille** et il sera ramassé **le jour de la rentrée**.

Bon travail et à bientôt !

Anthony Mansuy (Mathématiques)
mansuy.anthony@hotmail.fr

1 Calculs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1.1 Fractions

Propriété 1 (Opérations sur les fractions)

Soient a, b, c, d, k des nombres réels.

(1) Si b est non nul, $\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b}$.

(2) Si b et d sont non nuls, $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d}$.

(3) Si b et k sont non nuls, $\frac{a \times k}{b \times k} = \frac{a}{b}$.

(4) Si b, c et d sont non nuls, $\frac{\left(\frac{a}{b}\right)}{\left(\frac{c}{d}\right)} = \left(\frac{a}{b}\right) \times \left(\frac{d}{c}\right)$.

Exercice 1. Simplifier au mieux les expressions suivantes en les mettant sous la forme d'une fraction irréductible :

$$A = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}$$

$$B = \frac{3}{21} - \frac{2}{6}$$

$$C = \frac{1}{24} - \frac{1}{16}$$

$$D = \left(\frac{136}{15} - \frac{28}{5} + \frac{62}{10}\right) \times \frac{21}{24}$$

$$E = \frac{\frac{7}{15} + \frac{1}{3}}{\frac{3}{4} + \frac{12}{5}}$$

$$F = \frac{\frac{3}{4} + \frac{1}{12} \times \frac{9}{8}}{2 - \frac{4}{3}}$$

$$G = \frac{\frac{3}{7} \times \left(\frac{11}{3} - \frac{16}{5}\right)}{\left(\frac{3}{7} - \frac{11}{3}\right) \times \frac{7}{20}}$$

$$H = \frac{\frac{6}{15} + 2 \times \frac{3}{10}}{\frac{1}{4} - \frac{2}{3}}$$

Exercice 2. Mettre sous la forme d'une seule fraction, qu'on écrira sous la forme la plus simple possible :

1. $\frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

2. $\frac{a^3 - b^3}{(a-b)^2} - \frac{(a+b)^2}{a-b}$ pour $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$, distincts deux à deux.

3. $\frac{\frac{6(n+1)}{n(n-1)(2n-2)}}{\frac{2n+2}{n^2(n-1)^2}}$ pour $n \in \mathbb{N} \setminus \{1, 2\}$.

1.2 Puissances

Propriété 2 (Opérations sur les puissances)

Soient a et b deux nombres réels non nuls et m et n deux entiers relatifs. Alors :

(1) $a^m \times a^n = a^{m+n}$; $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$; $(a^m)^n = a^{mn}$.

(2) $a^m \times b^m = (a \times b)^m$; $\frac{a^m}{b^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^m$.

Exercice 3. Dans chaque cas, donner le résultat sous la forme a^n avec a et n deux entiers relatifs :

$$A = \frac{2^5}{2^{-2}} \quad B = (5^3)^{-2} \quad C = \frac{(10^5 \times 10^{-3})^5}{(10^{-5} \times 10^3)^{-3}} \quad D = \frac{(30^4)^7}{2^{28} \times 5^{28}} \quad E = \frac{(10^3)^{-5} \times 10^5}{10^3 \times 10^{-5}}$$

Exercice 4. Dans chaque cas, donner le résultat sous la forme $2^n \cdot 3^p$ avec n et p deux entiers relatifs :

$$A = \frac{2^3 \times 3^2}{3^4 \times 2^8 \times 6^{-1}} \quad B = 2^{21} + 2^{22} \quad C = \frac{3^{22} + 3^{21}}{3^{22} - 3^{21}} \quad D = \frac{(3^2 \times (-2)^4)^8}{((-3)^5 \times 2^3)^{-2}}$$

Exercice 5. Dans chaque cas, donner le résultat sous la forme $2^n \cdot 3^m \cdot 5^p \cdot 7^q$ avec n, m, p et q des entiers relatifs :

$$\begin{aligned} A &= 8^3 \times \frac{1}{4^2} & B &= \frac{21^{-1} \times 4^2}{3^{-4} \times 2^4} & C &= (3 \times 2)^3 + 3^2 \times 2^3 & D &= \frac{(3^5 \times 2^{-2})^2}{(9^{-1} \times 2^3)^2} \\ E &= \frac{(2^5)^3 \times 15^2}{10^2} & F &= \frac{10^{-5} \times (10^3)^7}{2^{-4} \times (2^5)^2} & G &= \frac{3^4}{2^5} + \left(\frac{6^2}{4^2}\right)^2 & H &= \frac{4^9 \times 3 + 4^{10}}{16^4} \end{aligned}$$

1.3 Racines carrées

Propriété 3 (Opérations sur les racines carrées)

Soient a et b deux réels positifs. Alors :

(1) $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{a \times b}$.

(2) Si $b \neq 0$, $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$.

(3) $\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$.

Exercice 6. Écrire le plus simplement possible les expressions suivantes :

$$A = \sqrt{(-5)^2} \quad B = \sqrt{(3 - \pi)^2} \quad C = \left(\sqrt{2\sqrt{3}}\right)^4 \quad D = \left(\frac{5 - \sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)^2$$

Exercice 7. En multipliant les expressions suivantes par la quantité conjuguée, écrire les expressions suivantes avec un dénominateur entier (on rappelle que $a - b$ est la quantité conjuguée de $a + b$) :

$$A = \frac{2 - \sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}} \quad B = \frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2} + 1} \quad C = \frac{\sqrt{5} - \sqrt{2}}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} \quad D = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{3}}{1 - \sqrt{3}}$$

Exercice 8. Simplifier au mieux les expressions suivantes :

$$\begin{aligned} A &= \frac{(3\sqrt{2})^2}{\sqrt{9 \times 10^2}} & B &= \frac{\sqrt{20} - 3\sqrt{5}}{\sqrt{5} - \sqrt{8} \times \sqrt{10}} & C &= (\sqrt{2^3 \times 9})^{-1} \times \sqrt{\frac{81 \times 2^5}{100}} \\ D &= \sqrt{2 - \sqrt{3}} \times \sqrt{2 + \sqrt{3}} & E &= \left(\sqrt{3 + \sqrt{5}} + \sqrt{3 - \sqrt{5}}\right)^2 & F &= \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} \\ G &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) & H &= 2\sqrt{27} + 3\sqrt{48} & I &= 4\sqrt{75} - 5\sqrt{300} + 2\sqrt{48} \end{aligned}$$

1.4 Calcul littéral

Propriété 4 (Identités remarquables)

Soient a et b deux nombres réels quelconques. Alors :

- En degré 2,

$$\begin{aligned}(a+b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2 \\ (a-b)^2 &= a^2 - 2ab + b^2 \\ a^2 - b^2 &= (a+b)(a-b)\end{aligned}$$

- En degré 3,

$$\begin{aligned}(a+b)^3 &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \\ (a-b)^3 &= a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 \\ a^3 - b^3 &= (a-b)(a^2 + ab + b^2) \\ a^3 + b^3 &= (a+b)(a^2 - ab + b^2)\end{aligned}$$

Exercice 9. Développer et réduire les expressions suivantes :

$$A = (2 + \sqrt{3})^2$$

$$B = (\sqrt{12} - \sqrt{75})^2$$

$$C = \left(1 + \sqrt{\frac{31}{3}}\right)^3 + \left(1 - \sqrt{\frac{31}{3}}\right)^3$$

$$D = (x + y + z)^2$$

$$E = (x + 2y + z)^2 - (x - y)^2$$

$$F = (2x - 1)^2 - (x - 3)(2x + 1)$$

$$G = (2x - 3 + y)^2$$

$$H = (x - 3y)^3$$

$$I = (x - 2y)^4$$

Exercice 10. Factoriser au mieux les expressions suivantes :

$$A(x) = (x + 1)(2x - 3) - (x^2 - 1)$$

$$B(x) = (3x - 1)^2 - (x + 5)^2$$

$$C(x) = 4x^2 - 9$$

$$D(x) = (x^2 - 9) + (2x - 6)(x + 7)$$

$$E(x) = (2x - 1)(x + 3) - (2 - 4x)(1 - x)$$

$$F(x) = x^4 - 4x^2$$

Exercice 11. Simplifier au maximum les expressions suivantes :

$$\begin{aligned}A(x) &= \frac{x}{x-1} - \frac{2}{x+1} - \frac{2}{x^2-1} \\ C(x) &= \frac{x^2}{x^2-x} + \frac{x^3}{x^3+x^2} - \frac{2x^2}{x^3-x}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}B(x) &= \frac{2}{x+2} - \frac{1}{x-2} + \frac{8}{x^2-4} \\ D(x) &= \frac{1}{x} + \frac{x+2}{x^2-4} + \frac{2}{x^2-2x}\end{aligned}$$

2 Fonctions réelles d'une variable réelle

2.1 Fonctions polynômiales des premier et second degrés

Propriété 5 (d'un polynôme du premier degré)

Soient a, b deux réels, $a \neq 0$, et $P(x) = ax + b$ un polynôme du premier degré.

Alors P admet **une unique racine** égale à $-\frac{b}{a}$ et on a le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
$P(x)$	signe de $-a$	0	signe de a

Propriété 6 (d'un polynôme du second degré)

Soient a, b, c trois réels, $a \neq 0$, et $P(x) = ax^2 + bx + c$ un polynôme du second degré.

On appelle *discriminant* du polynôme P le nombre réel $\Delta = b^2 - 4ac$.

- Si $\Delta > 0$, P admet **deux racines distinctes** $x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et on a la factorisation suivante :

$$P(x) = a(x - x_1)(x - x_2).$$

On en déduit le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$
$P(x)$	signe de a	0	signe de $-a$	signe de a

- Si $\Delta = 0$, P admet **une unique racine double** $x_0 = -\frac{b}{2a}$ et on a la factorisation suivante :

$$P(x) = a(x - x_0)^2.$$

On en déduit le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$	x_0	$+\infty$
$P(x)$	signe de a	0	signe de a

- Si $\Delta < 0$, P admet **aucune racine** et il ne peut pas être factorisé. En particulier, $P(x)$ est non nul pour tout $x \in \mathbb{R}$ et du signe du coefficient a :

x	$-\infty$	$+\infty$
$P(x)$	signe de a	

Exercice 12. Mettre les trinômes suivants sous forme factorisée après avoir déterminé leurs racines :

$$A(x) = x^2 + 4x + 3$$

$$B(x) = 3x^2 + 6x - 9$$

$$C(x) = 2x^2 - 3x + 1$$

$$D(x) = 2x^2 + 8x + 8$$

$$E(x) = 2x^2 + 5x + 6$$

$$F(x) = 2x^2 + 5x - 3$$

Exercice 13. Factoriser au mieux les expressions suivantes (il faut pour cet exercice s'aider des propriétés de la partie 1.4 afin de faire apparaître des polynômes de degrés 2) :

$$G(x) = x^3 - 27$$

$$H(x) = x^4 - 16$$

$$I(x) = (x^2 + 2x - 3)^2 - (x^2 + x - 2)^2$$

$$J(x) = 64x^3 + \frac{1}{8}$$

$$K(x) = (2x + 1)^3 - (8x + 4)$$

$$L(x) = (2x + 1)^3 + (2x - 1)^3$$

Exercice 14. Résoudre les équations suivantes :

$$(E_1) \quad 3x - 7 = 1 - 5x$$

$$(E_2) \quad 3(3 + 2x) + (2x - 1) = 8$$

$$(E_3) \quad \frac{2 - 3x}{3} = \frac{-4 + x}{4}$$

$$(E_4) \quad 3x^2 - 7x + 4 = 0$$

$$(E_5) \quad (-x^2 + 2x - 2)^2 - (x^2 + x - 3)^2 = 0$$

$$(E_6) \quad (9x^2 - 1)^2 = (3x + 1)^2$$

Exercice 15. Résoudre les inéquations suivantes dans $\mathbb{R}$:

$$(I_1) \quad 4x - 13 < 3$$

$$(I_2) \quad 2(7 - x) \geq x - 1$$

$$(I_3) \quad 2(x + 3) \leq \frac{4x - 8}{2}$$

$$(I_4) \quad x^2 - 5x + 6 < 0$$

$$(I_5) \quad x^2 - 7x \geq -6$$

$$(I_6) \quad x^3 - x > 3x^2 - 3$$

$$(I_7) \quad 2x^2 - 3 > x^2 - 6$$

$$(I_8) \quad 3x^2 + x + 1 < 0$$

$$(I_9) \quad x(x + 2) < (2x - 1)(x + 2)$$

2.2 Fonctions exponentielle et logarithme

Propriété 7 (Propriétés algébriques des fonctions exponentielle et logarithme)

Pour tous réels $x, y > 0$ et pour tout entier n ,

$$(1) \ln(x \times y) = \ln(x) + \ln(y).$$

$$(2) \ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y).$$

$$(3) \ln(x^n) = n \ln(x).$$

$$(4) \ln(1) = 0.$$

$$(5) e^{\ln(x)} = x$$

Pour tous réels x, y et pour tout entier n ,

$$(6) e^{x+y} = e^x \times e^y.$$

$$(7) e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y}.$$

$$(8) e^{nx} = (e^x)^n.$$

$$(9) e^0 = 1.$$

$$(10) \ln(e^x) = x.$$

Exercice 16. Simplifier au mieux les expressions suivantes :

$$A = e^{5 \ln(2)}$$

$$D = \ln(\sqrt{6} - 2) + \ln(\sqrt{6} + 2)$$

$$G = \ln(\sqrt{\sqrt{17} - 4}) + \ln(\sqrt{\sqrt{17} + 4})$$

$$J = \frac{\ln(20) - 2 \ln(2) + \ln(5)}{\ln(25)}$$

$$B = \ln(2 + \sqrt{3}) + \ln(2 - \sqrt{3})$$

$$E = \frac{e^{a+b}}{e^{a-b}} \times \frac{e^{2a-b}}{e^{2a+b}}$$

$$H = \ln(2) - 3 \ln(4) + \ln(32)$$

$$K = -\frac{1}{2} \ln\left(1 - \frac{e^2 - 1}{e^2}\right)$$

$$C = 2 \ln(4) - 3 \ln(2)$$

$$F = \frac{e^7 \times (e^{-5})^2}{e^{-3}}$$

$$I = \frac{\ln(e^2) + e^6 - 2}{e^8 \times e^{-2}}$$

$$L = \ln\left(\frac{\frac{e^2}{e^2 - 1} - 1}{\frac{e^2}{e^2 - 1} - 1}\right)$$

Exercice 17. Résoudre les équations et inéquations suivantes (d'inconnue x) :

$$(I_1) e^{3x-5} \geq 12$$

$$(I_2) 1 \leq e^{-x^2+x}$$

$$(I_3) e^{1+\ln(x)} \geq 2$$

$$(I_4) e^{-6x} \leq \sqrt{e}$$

$$(E_1) \ln(x) = \ln\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$(E_2) e^x = e^{-x}$$

$$(E_3) (\ln(x))^2 - 3 \ln(x) = 4$$

$$(E_4) e^x - \frac{2}{e^x} = 1$$

2.3 Domaine de définition d'une fonction

Propriété 8

On détermine le domaine de définition $\mathcal{D}_f$ d'une fonction f à partir de l'expression $f(x)$. S'il y a :

- Un dénominateur : il faut supprimer de $\mathcal{D}_f$ les racines de ce dénominateur.
- $\sqrt{u(x)}$: il faut résoudre l'inéquation $u(x) \geq 0$ et restreindre $\mathcal{D}_f$ à l'ensemble des solutions.
- $\ln(u(x))$: il faut résoudre l'inéquation $u(x) > 0$ et restreindre $\mathcal{D}_f$ à l'ensemble des solutions.

Exercice 18. Déterminer l'ensemble de définition des fonctions suivantes :

$$f_1(x) = \ln(1 + x^2)$$

$$f_4(x) = \sqrt{x^2 + 1} + x$$

$$f_7(x) = \ln(3 - \sqrt{x})$$

$$f_{10}(x) = \ln\left(\frac{x^2 - 3x + 2}{x - 2}\right)$$

$$f_2(x) = \frac{e^{2x}}{x^2 - 1}$$

$$f_5(x) = \ln\left(\frac{2-x}{x+3}\right)$$

$$f_8(x) = \frac{\ln(x)}{x}$$

$$f_{11}(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 4}}{x - 2}$$

$$f_3(x) = \exp\left(x + \frac{1}{x}\right)$$

$$f_6(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + x + 1}}$$

$$f_9(x) = \ln(x) \ln(3 - x)$$

$$f_{12}(x) = \frac{1}{(x^2 + x - 2)^3}$$

2.4 Dérivation

Voici les formules sur les dérivées à connaître :

Fonction $f(x) = \dots$	Fonction dérivée $f'(x) = \dots$
constante	0
$e^{u(x)}$	$u'(x)e^{u(x)}$
$\ln(u(x))$	$\frac{u'(x)}{u(x)}$
$(u(x))^n, n \in \mathbb{Z}$	$nu'(x)(u(x))^{n-1}$
$\sqrt{u(x)}$	$\frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$
$u(x) + v(x)$	$u'(x) + v'(x)$
$\lambda u(x), \lambda \in \mathbb{R}$	$\lambda u'(x)$
$u(x)v(x)$	$u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$
$\frac{u(x)}{v(x)}$	$\frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{(v(x))^2}$
$u(v(x))$	$v'(x)u'(v(x))$

Exercice 19. Sans s'occuper du domaine de validité des calculs effectués, dériver les fonctions suivantes :

$$\begin{array}{lll}
 f_1(x) = x^3 - 3x^2 + 7 & f_2(x) = (x^2 + x + 1)^3 & f_3(x) = \frac{2x + 3}{4x - 5} \\
 f_4(x) = \frac{1}{x^3 + 1} & f_5(x) = \frac{2x}{(1 + x^2)^2} & f_6(x) = \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} \\
 f_7(x) = (5x^2 - 1)\sqrt{2x - 3} & f_8(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} & f_9(x) = \frac{\sqrt{x}}{1 + x^2} \\
 f_{10}(x) = x^2 \ln(x) & f_{11}(x) = \ln(3x^2 + 1) & f_{12}(x) = \ln\left(\frac{1 - x}{1 + x}\right) \\
 f_{13}(x) = \frac{e^x}{1 + e^x} & f_{14}(x) = x^2 e^{-x} & f_{15}(x) = \sqrt{1 + e^x} \\
 f_{16}(x) = \ln(1 + e^{-x}) & f_{17}(x) = \sqrt{\ln(x)} & f_{18}(x) = \frac{\ln(x)}{e^x} \\
 f_{19}(x) = e^{x \ln(x)} & f_{20}(x) = \frac{1}{\sqrt{e^{2x}}} & f_{21}(x) = \ln(\ln(x))
 \end{array}$$

2.5 Primitives

Voici les formules sur les primitives à connaître :

FONCTION $x \mapsto \dots$	PRIMITIVE $x \mapsto \dots$
$u'(x)(u(x))^n, n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$	$\frac{(u(x))^{n+1}}{n+1}$
$\frac{u'(x)}{u(x)}$	$\ln(u(x))$
$\frac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}$	$2\sqrt{u(x)}$
$u'(x)e^{u(x)}$	$e^{u(x)}$

Exercice 20. Sans s'occuper du domaine de validité des calculs effectués, déterminer une primitive des fonctions suivantes :

$$f_1(x) = \frac{1}{x+1}$$

$$f_4(x) = e^{2x+1}$$

$$f_7(x) = x^2 e^{x^3}$$

$$f_{10}(x) = \frac{1}{x\sqrt{\ln(x)}}$$

$$f_2(x) = 2x(1+x^2)^3$$

$$f_5(x) = \frac{e^x}{\sqrt{1+e^x}}$$

$$(\star) f_8(x) = \frac{12x}{(1+3x^2)^3}$$

$$f_{11}(x) = \frac{e^{1/x}}{x^2}$$

$$f_3(x) = \frac{1}{\sqrt{1+2x}}$$

$$f_6(x) = \frac{2x^2}{1+x^3}$$

$$f_9(x) = \frac{\ln(x)}{x}$$

$$f_{12}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{1 - e^{-x} + e^x}$$
