Chapitre 10

Équations différentielles linéaires

Compétences attendues.

✓ Résoudre une équation différentielle linéaire d'ordre 1 (résolution de l'équation homogène associée, recherche d'une solution particulière par variation de la constante ou dans le cas d'un second membre exponentielle × polynômes).

✓ Résoudre une équation différentielle linéaire d'ordre 1 non normalisée avec problème de raccordement.

✓ Résoudre une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants (résolution de l'équation homogène associée, recherche d'une solution particulière dans le cas d'un second membre exponentielle × polynômes).

Anthony Mansuy - Professeur en MP2I au Lycée Roosevelt (Reims)
Page personnelle : `anthony-mansuy.fr/`
E-mail : `mansuy.anthony@hotmail.fr`

1 Équations différentielles linéaires d'ordre 1

Dans tout ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne l'un des ensembles $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et I est un intervalle de $\mathbb{R}$.

1.1 Généralités

Définition.

- On appelle *équation différentielle linéaire du premier ordre* toute équation de la forme :

$$y'(t) + a(t)y(t) = b(t) \tag{E}$$

  où a et b sont des fonctions continues sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$.

  La fonction b s'appelle le *second membre de* (E). Lorsque b est la fonction nulle, on dit que (E) est *homogène* ou *sans second membre*.

  Lorsque la fonction a est constante sur I, on dit que (E) est *à coefficients constants*.

- Une fonction $f : I \to \mathbb{K}$ est *solution sur I de* (E) si f est dérivable sur I et si pour tout $t \in I$, $f'(t) + a(t)f(t) = b(t)$.

  La courbe représentative de f est alors appelée *courbe intégrale de* (E) *sur* I.

Remarques.

- L'équation différentielle (E) est dite linéaire car elle ne fait intervenir qu'une combinaison linéaire de $y'(t)$ et $y(t)$, et pas leurs puissances, ou leur exponentielle, ni quoi que ce soit d'autre. Par exemple, $y'(t)^2 + e^{y(t)}t^2 = \ln(t)$ est une équation différentielle, mais qui n'est pas linéaire.

  L'équation différentielle (E) est dite du premier ordre (ou d'ordre 1) car elle ne fait intervenir que la dérivée première de y, et pas ses dérivées secondes, troisièmes, ...

- Soit f une solution de (E) sur I. Par définition, f est dérivable sur I. Elle est en fait de classe $\mathscr{C}^1$ sur I puisque $f'(t) = b(t) - a(t)f(t)$ qui est par hypothèse continue sur I.

Notation.

On note généralement les équations sous forme condensée $y' + a(t)y = b(t)$, où il est alors sous-entendu que y est une fonction, et que t est la variable dont dépend la fonction.

Exemples.

- La tension U aux bornes d'un condensateur de capacité C en série avec une résistance R et un générateur de force électromotrice $E(t)$ vérifie l'équation différentielle linéaire d'ordre 1 :

$$RCU' + U = E(t).$$

- L'intensité I dans un circuit RL constitué d'une résistance R, d'une bobine d'inductance L et d'un générateur de force électromotrice $E(t)$ vérifie l'équation différentielle linéaire d'ordre 1 :

$$LI' + RI = E(t).$$

- La proportion y de carbone 14 dans le carbone total des êtres vivants est constante. Après la mort, elle diminue de $\frac{1}{8000}$ par an et vérifie donc l'équation différentielle suivante (où le temps est exprimé en années) :

$$y' + \frac{1}{8000}y = 0.$$

  On peut ainsi dater la mort d'un être vivant grâce à cette relation.

Remarque. On rencontre souvent des équations différentielles sous la forme $(E) : \alpha(t)y' + \beta(t)y = \gamma(t)$. Dans ce cas, on se ramène à une équation de la forme précédente en divisant par $\alpha(t)$, ce qui nécessite de se placer sur un intervalle sur lequel la fonction α ne s'annule pas. On parle alors de *forme normalisée* de l'équation différentielle.

Exemple. Considérons l'équation différentielle $(E) : ty' - y = \frac{1}{t}$. Sur chacun des intervalles $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$ sur lesquels t ne s'annule pas, la résolution de (E) se ramène à celle de sa forme normalisée $y' - \frac{1}{t}y = \frac{1}{t^2}$.

1.2 Résolution de l'équation homogène associée

Définition.

Soient a et b des fonctions continues sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$. On considère l'équation différentielle linéaire du premier ordre suivante :

$$y' + a(t)y = b(t). \tag{E}$$

On appelle *équation différentielle homogène associée à* (E) l'équation :

$$y' + a(t)y = 0. \tag{E_0}$$

Dans cette section, on étudie et on résout l'équation homogène (E_0) associée à l'équation différentielle linéaire du premier ordre (E). On notera $\mathscr{S}$ l'ensemble des solutions de (E), et $\mathscr{S}_0$ l'ensemble des solutions de l'équation homogène (E_0).

Propriété 1

L'ensemble $\mathscr{S}_0$ contient la fonction nulle, et il est stable par combinaison linéaire :

$$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K},\ \forall f, g \in \mathscr{S}_0, \quad \lambda f + \mu g \in \mathscr{S}_0.$$

Propriété 2 (Cas d'une équation à coefficients non constants)

Pour toute fonction continue $a : I \to \mathbb{K}$, les solutions de $y' + a(t)y = 0$ sont les fonctions de la forme :

$$t \mapsto y(t) = \lambda e^{-A(t)}$$

où A est une primitive quelconque de la fonction a sur I et $\lambda \in \mathbb{K}$. Ainsi :

$$\mathscr{S}_0 = \{t \in I \mapsto \lambda e^{-A(t)},\ \lambda \in \mathbb{K}\}$$

Corollaire 3 (Cas d'une équation à coefficients constants)

Pour tout $a \in \mathbb{K}$, les solutions sur $\mathbb{R}$ de $y' + ay = 0$ sont les fonctions de la forme :

$$y : t \in \mathbb{R} \mapsto \lambda e^{-at} \ \text{ avec } \ \lambda \in \mathbb{K}.$$

Remarques.

- Une équation homogène possède donc toujours une infinité de solutions. Notons également qu'il n'y a qu'une solution qui s'annule : la fonction nulle.
- Toutes les solutions de (E_0) sont donc colinéaires, proportionnelles à $f : t \mapsto e^{-A(t)}$. On dit alors que l'ensemble des solutions $\mathscr{S}_0$ est une *droite vectorielle dirigée par* f.

Exercice 1. Résoudre $\sin(t)y' - \cos(t)y = 0$ sur $I =]0, \pi[$.

Exercice 2. Résoudre $2ty' - y = 0$.

1.3 Résolution de l'équation avec second membre

On conserve les notations introduites dans la section précédente.

Propriété 4 (Forme générale des solutions)

Soit $y_P \in \mathscr{S}$ une solution particulière de l'équation différentielle (E).
Une fonction y est solution de (E) si, et seulement si, $y - y_P$ est solution de (E_0).
Ainsi, toute solution de (E) s'obtient en ajoutant à une solution particulière y_P de (E) une solution de l'équation homogène associée (E_0) :

$$\mathscr{S} = y_p + \mathscr{S}_0 = \{y_p + y_0,\ y_0 \in \mathscr{S}_0\}.$$

Remarques.

- Après avoir résolu l'équation homogène (E_0), il « suffit » donc de déterminer une solution particulière y_P de (E) pour en achever la résolution. Reste à savoir comment en obtenir une...
- On dit que l'ensemble $\mathscr{S}$ des solutions de (E) est une *droite affine* passant par y_p et dirigée par $\mathscr{S}_0$.

Exercice 3. Résoudre l'équation (E) : $(1 + x^2)y' + y = 1$.

On donne à présent des méthodes pour obtenir une solution particulière d'une équation différentielle linéaire.

Propriété 5 (Principe de superposition)

Soient $a, b_1, b_2 : I \to \mathbb{K}$ des fonctions continues.
Soient f_1 une solution sur I de (E_1) : $y' + a(t)y = b_1(t)$ et f_2 une solution sur I de (E_2) : $y' + a(t)y = b_2(t)$.
Alors pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$, $\lambda f_1 + \mu f_2$ est solution sur I de :

$$y' + a(t)y = \lambda b_1(t) + \mu b_2(t).$$

Méthode. Comment utiliser le principe de superposition ?

Lorsque le second membre d'une équation différentielle linéaire se présente sous forme d'une somme de deux termes, on peut se ramener à la résolution de deux équations différentielles avec des second membres plus simples.

Propriété 6 (Méthode de variation de la constante)

Soient toujours a et b des fonctions continues sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$. Considérons l'équation différentielle linéaire d'ordre 1 :

$$y' + a(t)y = b(t). \qquad (E)$$

Notons A une primitive de a sur I. Alors on peut trouver une solution de (E) de la forme $t \mapsto \lambda(t)e^{-A(t)}$ où λ est une fonction dérivable sur I.

Remarques.

- Rappelons que les solutions de l'équation homogène associée à (E) sont les fonctions $t \mapsto \lambda e^{-A(t)}$ où $\lambda \in \mathbb{K}$ est une **constante** quelconque et A une primitive de a.

  Pour déterminer une solution particulière y_P de (E) par méthode de variation de la constante, on fait effectivement « varier la constante λ » en cherchant y_P sous la forme $t \mapsto \lambda(t)\exp(-A(t))$ où λ est à présent une **fonction** dérivable sur I.

- Ce résultat garantit l'existence d'au moins une solution de (E), et donc d'une infinité de solutions de (E), toutes les fonctions $t \mapsto y_P(t) + \lambda e^{-A(t)}$ avec λ parcourant $\mathbb{K}$.

Exercice 4. Déterminer les solutions de $(t+1)y' - ty + 1 = 0$ sur $]-1, +\infty[$.

Terminons par un cas particulier où l'on peut se passer de la variation de la constante : celui des équations à coefficients constants et à second membre de la forme « exponentielle $\times$ polynôme ».

Propriété 7 (Solution particulière avec second membre exponentielle $\times$ polynôme)

Soient $a \in \mathbb{K}$ et P une fonction polynomiale à coefficients dans $\mathbb{K}$. Considérons l'équation différentielle linéaire à coefficients constants :

$$y' + ay = e^{\lambda t}P(t). \tag{E}$$

Alors il existe une solution de (E) de la forme $t \to e^{\lambda t}t^m Q(t)$ où Q est une fonction polynomiale à coefficients dans $\mathbb{K}$ telle que $\deg(Q) = \deg(P)$ et :

- $m = 0$ si $\lambda + a \neq 0$;
- $m = 1$ si $\lambda + a = 0$.

Exercice 5. Déterminer les solutions de l'équation différentielle $y' + y = 4\text{ch}(t)$.

1.4 Résolution avec conditions initiales

Définition.

Soit $(t_0, y_0) \in I \times \mathbb{K}$. Le *problème de Cauchy* associé au couple (t_0, y_0) et à l'équation différentielle (E) : $y' + a(t)y = b(t)$ est la recherche des solutions y de (E) sur I vérifiant la condition initiale $y(t_0) = y_0$.

Propriété 8 (Théorème de Cauchy-Lipschitz)

Soit $(t_0, y_0) \in I \times \mathbb{K}$. Alors il existe une unique solution au problème de Cauchy :

$$\begin{cases} y' + a(t)y = b(t) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}.$$

Exercice 6. Résoudre $y' - \dfrac{1}{2t}y = \sqrt{t}$ sur $I = \mathbb{R}_+^*$ avec pour condition initiale $y(1) = 1$.

Corollaire 9

(1) Pour tout point $(t_0, y_0) \in I \times \mathbb{K}$, il existe une et une seule courbe intégrale de (E) sur I qui passe par ce point.

(2) Deux courbes intégrales distinctes de (E) sur I ne peuvent s'intersecter dans $I \times \mathbb{K}$.

Remarque. Considérons l'équation différentielle homogène du premier ordre (E_0) : $y' + a(t)y = 0$. Nous avions constaté après sa résolution que la seule solution de (E_0) s'annulant sur I est la fonction nulle. On retrouve ce résultat grâce au corollaire précédent : si f est solution de (E_0) et s'annule en un réel $t_0 \in I$, alors f est solution du problème de Cauchy :

$$\begin{cases} y' + a(t)y = 0 \\ y(t_0) = 0 \end{cases}.$$

Mais puisque la fonction nulle est aussi solution de ce problème de Cauchy, ces deux fonctions coïncident par unicité : f est la fonction nulle.

1.5 Problèmes de raccordement

Jusqu'ici, nous avons considéré uniquement des équations différentielles linéaires du premier ordre sous forme normalisée $y' + a(t)y = b(t)$.

Étudions dans cette section le cas d'équations différentielles linéaires du premier ordre non normalisées :

$$\alpha(t)y' + \beta(t)y = \gamma(t) \tag{E}$$

où α, β, γ sont des fonctions continues sur un intervalle I, mais où α est susceptible de s'annuler sur I. Nous allons voir sur des exemples que les résultats précédents, comme le théorème de Cauchy-Lipschitz, peuvent alors tomber en défaut.

Expliquons tout d'abord comment nous allons procéder pour la résolution de (E) sur I.

Méthode. Problème de raccordement pour les équations non normalisées.

Supposons que α s'annule en un unique point t_0 de I. Pour résoudre (E) sur I, on procèdera comme suit :

(i) on résout par les méthodes vues auparavant (E) sur l'intervalle $I_g =]-\infty, t_0[\cap I$ (resp. $I_d =]t_0, +\infty[\cap I$) sur lequel α ne s'annule pas ;

(ii) si f est solution de (E) sur I, elle est en particulier solution de (E) sur I_g (resp. I_d). On en connait donc une forme explicite f_g (resp. f_d) sur cet intervalle.

(iii) f étant solution de (E) sur I, la fonction $t \in I \setminus \{t_0\} \mapsto \begin{cases} f_g(t) & \text{si } t \in I_g \\ f_d(t) & \text{si } t \in I_d \end{cases}$ doit être :

- *prolongeable par continuité en t_0 ;*
- *dérivable sur I, c'est-à-dire en t_0 (elle l'est sur $I \setminus \{t_0\}$ par définition) ;*
- *solution de l'équation différentielle sur I, c'est-à-dire en t_0 (elle l'est sur $I \setminus \{t_0\}$ par définition).*

Il résulte de l'étude de ces trois points des contraintes supplémentaires (ou pas) sur les fonctions f_g et f_d, permettant ainsi d'obtenir les solutions de (E) sur I.

Exercice 7. Déterminer les solutions de (E) : $ty' - 2y = t^3$ sur $\mathbb{R}$.

Remarque. Le problème de Cauchy $\begin{cases} (E) \\ y(0) = 0 \end{cases}$ a donc une infinité de solutions. À l'opposé, le problème de Cauchy $\begin{cases} (E) \\ y(0) = 1 \end{cases}$ n'a aucune solution. On voit ici que le théorème de Cauchy-Lipschitz tombe en défaut en $t = 0$, là où le coefficient t de y' s'annule.

Exercice 8. Résoudre (E) : $(1-t)y' - y = t$ sur $\mathbb{R}$.

Remarque. Le problème de Cauchy $\begin{cases} (E) \\ y(1) = 0 \end{cases}$ n'a pas de solution dans ce cas. Le problème de Cauchy $\begin{cases} (E) \\ y(1) = -1 \end{cases}$ a pour sa part une unique solution.

2 Équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants

2.1 Généralités

Définition.

- On appelle *équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants* toute équation de la forme :

$$y'' + ay' + by = c(t) \tag{E}$$

  où $a, b \in \mathbb{K}$ et $c : I \to \mathbb{K}$ est une fonction continue.

  La fonction c s'appelle le *second membre de* (E). Lorsque c est la fonction nulle, on dit que (E) est *homogène* ou *sans second membre.*

- Une fonction $f : I \to \mathbb{K}$ est *solution de* (E) *sur* I si f est deux fois dérivable sur I et si pour tout $i \in I$:

$$f''(t) + af'(t) + bf(t) = c(t).$$

  La courbe représentative f est alors appelée *courbe intégrale de* (E) *sur* I.

Remarque. Si f est solution de (E) sur I, alors $f''(t) = c(t) - af'(t) - bf(t)$ et f'' est continue sur I.

Exemples.

- La tension U aux bornes d'un condensateur de capacité C en série avec une résistance R, une bobine d'inductance L et un générateur de force électromotrice $E(t)$ vérifie l'équation différentielle :

$$LCU'' + RCU' + U = E(t).$$

- L'intensité I dans un circuit LC constitué d'un condensateur de capacité R et d'une bobine d'inductance L vérifie l'équation différentielle :

$$I'' + \frac{1}{LC} I = 0.$$

2.2 Résolution de l'équation homogène associée

Définition.

Soient $a, b \in \mathbb{K}$ et $c : I \to \mathbb{K}$ une fonction continue sur I. On considère l'équation différentielle linéaire suivante :

$$y'' + ay' + by = c(t). \tag{E}$$

On appelle *équation différentielle homogène associée à* (E) l'équation :

$$y'' + ay' + by = 0. \tag{E_0}$$

On notera $\mathscr{S}$ l'ensemble des solutions de (E), et $\mathscr{S}_0$ l'ensemble des solutions de l'équation homogène (E_0).

Propriété 10

L'ensemble $\mathscr{S}_0$ contient la fonction nulle, et il est stable par combinaison linéaire :

$$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K},\ \forall f, g \in \mathscr{S}_0, \quad \lambda f + \mu g \in \mathscr{S}_0.$$

Propriété 11

Soit $r \in \mathbb{K}$. La fonction $t \mapsto e^{rt}$ est solution de (E_0) sur $\mathbb{R}$ si, et seulement si, $r^2 + ar + b = 0$.

Définition.

On appelle *équation caractéristique associée à* (E) l'équation $r^2 + ar + b = 0$ d'inconnue $r \in \mathbb{C}$.

Notons dans la suite $\Delta = a^2 - 4b$ le discriminant de l'équation caractéristique.

Propriété 12 (Résolution de l'équation homogène **dans** $\mathbb{C}$)

- Si $\Delta \neq 0$, l'équation caractéristique admet deux racines complexes distinctes r_1 et r_2. Les solutions complexes de (E_0) sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions de la forme

$$t \mapsto \lambda e^{r_1 t} + \mu e^{r_2 t} \quad \text{où} \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2.$$

- Si $\Delta = 0$, l'équation caractéristique admet une racine double $r \left(= -\frac{b}{2a} \in \mathbb{C}\right)$. Les solutions complexes de (E_0) sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions de la forme

$$t \mapsto (\lambda + \mu t)e^{rt} \quad \text{où} \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2.$$

Propriété 13 (Résolution de l'équation homogène **dans** $\mathbb{R}$)

- Si $\Delta > 0$, l'équation caractéristique admet deux racines réelles distinctes r_1 et r_2. Les solutions de (E_0) sur $\mathbb{R}$ sont alors les fonctions de la forme

$$t \mapsto \lambda e^{r_1 t} + \mu e^{r_2 t} \quad \text{où} \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2.$$

- Si $\Delta = 0$, l'équation caractéristique admet une racine double $r \in \mathbb{R}$. Les solutions de (E_0) sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions de la forme

$$t \mapsto (\lambda + \mu t)e^{rt} \quad \text{où} \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2.$$

- Si $\Delta < 0$, l'équation caractéristique admet deux solutions complexes conjuguées $\alpha \pm i\beta$ (avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$). Les solutions de (E_0) sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions de la forme

$$t \mapsto e^{\alpha t}(\lambda \cos(\beta t) + \mu \sin(\beta t)) \quad \text{où} \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2.$$

Remarques.

- Comme vu dans un chapitre précédente, les solutions dans le cas $\Delta < 0$ peuvent être récrites sous la forme $t \mapsto e^{\alpha t}(A\cos(\beta t + \varphi))$ où $(A, \varphi) \in \mathbb{R}^2$.
- On dit que l'ensemble des solutions de (E_0) est un *plan vectoriel*, puisque celles-ci sont combinaisons linéaires de deux fonctions non proportionnelles (que ce soit dans le cas réel ou complexe).

Exercice 9. Déterminer les solutions réelles et complexes de l'équation différentielle $y'' + y' + y = 0$.

2.3 Résolution de l'équation avec second membre

On conserve les notations introduites dans les sections précédentes.

Propriété 14

Soit $y_P \in \mathscr{S}$ une solution particulière de l'équation différentielle (E).

Une fonction y est solution de (E) si, et seulement si, $y - y_P$ est solution de (E_0).

Ainsi toute solution de (E) s'obtient en ajoutant à une solution particulière y_P de (E) une solution de l'équation homogène associée (E_0) :

$$\mathscr{S} = y_p + \mathscr{S}_0 = \{y_p + y,\ y \in \mathscr{S}_0\}.$$

Remarque. L'ensemble $\mathscr{S}$ est donc la somme d'une solution particulière y_p et de combinaisons linéaires de deux fonctions non proportionnelles. On dit alors que $\mathscr{S}$ est un *plan affine* passant par y_P et dirigé par $\mathscr{S}_0$.

Propriété 15 (Principe de superposition)

Soient $a, b \in \mathbb{K}$, $c_1, c_2 : I \to \mathbb{K}$ des fonctions continues sur I, et les équations différentielles :

$$(E_1) : \; y'' + ay' + by = c_1(t) \quad \text{et} \quad (E_2) : \; y'' + ay' + by = c_2(t).$$

Soient f_1 solution sur I de (E_1), et f_2 solution sur I de (E_2). Alors pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$, $\lambda f_1 + \mu f_2$ est solution sur I de :

$$y'' + ay' + by = \lambda c_1(t) + \mu c_2(t).$$

Bien qu'il existe une méthode de variation des constantes pour les équations différentielles linéaires d'ordre 2, celle-ci ne figure pas à notre programme, et nous ne saurons donc pas toujours résoudre une équation avec second membre. Seuls certains cas particuliers sont à connaître, qui sont tous englobés par la proposition suivante.

Propriété 16 (Solution particulière avec second membre exponentiel × polynôme)

On considère $a, b, \lambda \in \mathbb{K}$, une fonction polynomiale P à coefficients dans $\mathbb{K}$ et l'équation différentielle linéaire à coefficients constants :

$$y'' + ay' + by = P(t)e^{\lambda t}. \tag{E}$$

Alors il existe une solution de (E) de la forme $t \mapsto Q(t)t^m e^{\lambda t}$ où Q est une fonction polynomiale à coefficients dans $\mathbb{K}$ telle que $\deg(Q) = \deg(P)$ et :

- $m = 0$ si λ n'est pas racine de l'équation caractéristique ;
- $m = 1$ si λ est racine simple de l'équation caractéristique ;
- $m = 2$ si λ est racine double de l'équation caractéristique.

Remarque. La proposition précédent nous permet également de traiter le cas de seconds membres de la forme $t \mapsto P(t)e^{rt}\cos(\omega t)$ ou $t \mapsto P(t)e^{rt}\sin(\omega t)$ avec P polynomiale à coefficients réels et $r, \omega \in \mathbb{R}$. Dans ce cas, on passera par les complexes, et on commencera par chercher les solutions de l'équation $y''+ay'+by = P(t)e^{(r+i\omega)t}$, puis on passera à la partie réelle/imaginaire.

Exercice 10. Déterminer les solutions réelles des équations différentielles suivantes :

- $(E_1) : y'' - 2y' + y = e^t$;
- $(E_2) : y'' + 4y = 3\sin(2t)$;
- $(E_3) : y'' + 2y' + 2y = 3e^{-t}\cos(t)$.

2.4 Résolution avec conditions initiales

Définition.

Soit $(t_0, y_0, y_0') \in I \times \mathbb{K}^2$. Le *problème de Cauchy* associé à un triplet (t_0, y_0, y_1) et à l'équation différentielle $(E) : y'' + ay' + by = c(t)$ est la recherche des solutions y de (E) sur I vérifiant les deux conditions initiales $y(t_0) = y_0$, $y'(t_0) = y_0'$.

Propriété 17 (Théorème de Cauchy-Lipschitz)

Soit $(t_0, y_0, y_0') \in I \times \mathbb{K}^2$. Alors il existe une unique solution au problème de Cauchy :

$$\begin{cases} y'' + ay' + by = c(t) \\ y(t_0) = y_0 \\ y'(t_0) = y_0' \end{cases}.$$

Exercice 11. Résoudre le problème de Cauchy $\begin{cases} y'' - 2y' + y = e^t \\ y(0) = 2 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$.

Propriété 18

- Pour tout $(t_0, y_0, y_0') \in I \times \mathbb{K}^2$, il existe une et une seule courbe intégrale de (E) sur I qui passe par le point $(t_0, y_0) \in I \times \mathbb{K}$ et dont la tangente en ce point est de pente y_0'.
- Deux courbes intégrales distinctes de (E) sur I ne peuvent s'intersecter dans $I \times \mathbb{K}$ avec une tangente commune.

Remarques.

- Contrairement au cas des équations d'ordre 1, les courbes intégrales d'une équation différentielle linéaire d'ordre 2 peuvent donc se croiser. Plus précisément, pour chaque $(t_0, y_0) \in I \times \mathbb{K}$, il existe une infinité de courbes intégrales passant par (t_0, y_0) : une pour chaque valeur possible de $y'(t_0)$.
- La seule solution de (E_0) : $y'' + ay' + by = 0$ telle que $y(t_0) = y'(t_0) = 0$ est la fonction nulle. En effet, la fonction nulle est solution de (E_0). Et par la proposition précédente, c'est l'unique solution telle que $y(t_0) = y'(t_0) = 0$.

Le saviez-vous ?

Nous avons vu dans ce chapitre des méthodes de résolution pour les équations différentielles linéaires d'ordre 1 et celles d'ordre 2 à coefficients constants. Dès que l'on sort de ce cadre, les choses se compliquent très rapidement : même les équations linéaires du second ordre à coefficients variables et sans second membre ne se résolvent pas explicitement en général. C'est par exemple le cas de l'équation suivante (appelée *équation d'Airy*) :

$$y'' - ty = 0.$$

C'est pour cette raison qu'au $19^{\text{ème}}$ siècle furent introduites de nombreuses fonctions spéciales (fonctions de Bessel, fonction d'Airy...) définies comme solutions d'équations qu'il est impossible de résoudre explicitement.

L'étude des équations différentielles ne s'arrête cependant pas ici. À défaut d'une résolution explicite, on peut s'intéresser à l'étude qualitative de ses solutions : peut-on garantir l'existence et l'unicité d'une solution d'un problème de Cauchy, déterminer le domaine de définition d'une solution, son comportement aux bornes de ce domaine, étudier la stabilité des solutions par perturbations, ...