Chapitre 11

Ensembles et relations binaires

Compétences attendues.

- ✓ Montrer une inclusion entre ensembles, une égalité entre ensembles.
- ✓ Maitriser les bases du calcul ensembliste (et ses opérations union, intersection, complémentaire, produit cartésien).
- ✓ Montrer qu'une famille d'ensembles est une partition ou un recouvrement.
- ✓ Montrer qu'une relation binaire est une relation d'équivalence ou une relation d'ordre.
- ✓ Montrer qu'une partie d'un ensemble ordonné est majorée, minorée, et déterminer s'ils existent le minimum, le maximum, la borne supérieure ou la borne inférieure de cette partie.

Anthony Mansuy - Professeur en MP2I au Lycée Roosevelt (Reims)
Page personnelle : `anthony-mansuy.fr/`
E-mail : `mansuy.anthony@hotmail.fr`

1 Ensembles

1.1 Définitions

La définition rigoureuse de la notion d'ensemble nécessite une axiomatique assez lourde (due à Zermolo et Fraenkel). Nous nous contentons pour notre part du point de vue intuitif suivant.

Définition.

- Un *ensemble* E est une collection ou un groupement d'objets distincts. Les objets x de E s'appellent les *éléments* de E.
- Si E est un ensemble et si x est un élément de E, on dit que x *appartient à* E ou que x *est dans* E et on écrit $x \in E$.

  Dans le cas contraire, si x n'est pas un élément de E, on dit que x *n'appartient pas à* E ou que x *n'est pas dans* E et on écrit $x \notin E$.
- Il existe un unique ensemble ne contenant aucun élément, appelé l'*ensemble vide* et noté $\emptyset$.

Le saviez-vous ?

Longtemps, les mathématiciens se sont contentés de ce point de vue intuitif, sans chercher à formaliser cette notion. Ce n'est qu'à l'aube du $20^{ème}$ siècle qu'on s'est penché sur cette formalisation, qui a bien failli faire vaciller l'édifice mathématique sur ses fondations. En effet, Cantor, puis Russell au travers de son célèbre paradoxe, ont montré qu'on ne pouvait pas se contenter de cette approche intuitive, et que celle-ci amenait des contradictions si on admettait que toute collection pouvait être un ensemble.

Voici le « paradoxe de Russell » : on considère

$$E = \{\text{ensembles } F \text{ qui ne se contiennent pas eux-mêmes}\}.$$

Supposons par l'absurde que E soit un ensemble.

- Si $E \notin E$, alors par définition de E, E est un élément de E, d'où une contradiction ;
- Si $E \in E$, alors, par définition de E, E n'est pas élément de E, d'où une contradiction.

Cet argument très simple montre que E ne peut pas être un ensemble.

Ce paradoxe est aussi connu sous le nom de « paradoxe du barbier ». En effet, la situation s'apparente à celle d'un barbier qui rase tous ceux qui ne se rasent pas eux-mêmes. Qui rase le barbier ?

Ce paradoxe avait été envoyé en 1901 par Russell au logicien et philosophe allemand Gottlob Frege, suite à la parution du premier volume de son ouvrage *Les fondements de l'arithmétique*, pour lui prouver que son ouvrage reposait sur une contradiction. Frege publia tout de même le second volume, en lui adjoignant un appendice dans lequel il fit le constat sans doute le plus désarmant de toute l'histoire des mathématiques :

> « Pour un écrivain scientifique, il est peu d'infortunes pires que de voir l'une des fondations de son travail s'effondrer alors que celui-ci s'achève. C'est dans cette situation inconfortable que m'a mise une lettre de M. Bertrand Russell alors que le présent volume allait paraître ».

À la suite de cela, Frege cessa presque entièrement ses travaux mathématiques.

Il y eu ensuite de nombreuses tentatives d'axiomatisation de la théorie des ensembles, toutes n'ont pas été fructueuses. Le choix qui s'est imposé est finalement l'axomatique de Zermelo-Fraenkel.

Cette « crise des fondements » a marqué la naissance des mathématiques moderne et de la logique, par une formalisation systématique de toutes les notions utilisées.

Un ensemble peut être défini de deux manières : soit *en extension*, soit *en compréhension*.

- Définir un ensemble en extension, c'est donner la liste complète explicite de tous ses éléments entre accolades. Dans cette liste :
  - l'ordre des éléments listés n'a aucune importance ;
  - le nombre d'occurrences d'un élément n'a pas d'importance : un élément appartient ou n'appartient pas à un ensemble, mais il ne peut pas lui « appartenir plusieurs fois ». S'il apparait plusieurs fois, attention au fait qu'il s'agit du même élément.

  Par exemple, $\{0, 1, 2\}$ est un ensemble, le même que $\{2, 1, 0\}$ ou que $\{1, 2, 2, 0\}$.

  Un ensemble de la forme $\{x\}$ est appelé un *singleton*.

  Il est bien évident qu'on ne peut définir en extension que des ensembles finis (il serait compliqué d'écrire tous les éléments d'un ensemble infini. . .).

- Définir un ensemble en compréhension, c'est le définir par une propriété $\mathscr{P}$ que ses éléments vérifient et sont seuls à vérifier. On note $\{x \in E \mid \mathscr{P}(x)\}$ l'ensemble des éléments x d'un ensemble E qui satisfont la propriété $\mathscr{P}$.

  Par exemple, l'ensemble $\{n \in \mathbb{N} \mid \exists p \in \mathbb{N},\, n = 2p\}$ désigne l'ensemble des entiers naturels pairs. Cet ensemble peut également se noter $\{2p,\ p \in \mathbb{N}\}$, ou encore $\{2p\}_{p\in\mathbb{N}}$.

  Plus généralement, si $f : E \to F$ est une application[1] entre deux ensembles E et F, alors $\{f(x),\ x \in E\}$ désigne l'ensemble $\{y \in F \mid \exists x \in E,\, y = f(x)\}$.

Mise en garde.

Soyons bien clairs, il n'y a pas deux sortes d'ensembles en mathématiques, seulement deux manières de les décrire. Un même ensemble peut être présenté en extension ou en compréhension. Par exemple :

$$\{-1, 1\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x^4 = 1\} = \{z \in \mathbb{C} \mid z^2 = 1\} = \{(-1)^n,\ n \in \mathbb{Z}\}.$$

Terminons cette section par la définition (intuitive) de cardinal d'un ensemble fini, notion qui sera précisée dans un chapitre ultérieur.

Définition.

Si E est un ensemble fini, on appelle *cardinal de* E, et on note $\mathrm{Card}(E)$ ou $|E|$, le nombre d'éléments de E.

Exemples. $\mathrm{Card}(\emptyset) = 0$, $\mathrm{Card}(\{\emptyset\}) = 1$ de même que pour tout singleton, $\mathrm{Card}(\{-1, 1\}) = 2$.

1.2 Inclusion, égalité, ensemble des parties

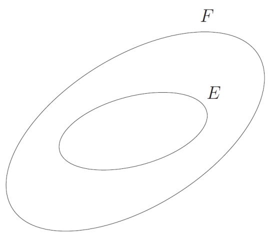
Définition.

Soient E et F deux ensembles. On dit que E est *inclus dans* F, et on note $E \subset F$ ou $E \subseteq F$, si tout élément de E est un élément de F :

$$\forall x,\ (x \in E \ \Rightarrow\ x \in F)\,,$$

soit en résumé : $\quad \forall x \in E, \quad x \in F$.

Diagramme de Venn. Ce sont des représentations schématiques d'ensembles. Par exemple, on peut schématiser l'inclusion $E \subset F$ de la façon suivante :



[1]Objet mathématique qui associe à un élément x de E un unique élément $f(x)$ de F. Nous en donnerons une définition plus précise dans la suite.

Méthode. Comment montrer une inclusion entre deux ensembles ?

*Pour montrer que $E \subset F$, on prend un élément x quelconque de E et on prouve que x appartient à F. Une rédaction correcte commencera donc **toujours** par « Soit $x \in E$ », pour terminer par « ... donc $x \in F$ ».*

Exemples.

- On dispose des inclusions suivantes $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.
- Pour tout ensemble E, on a toujours $E \subset E$ et $\emptyset \subset E$. En effet pour la deuxième inclusion, la proposition « $\forall x \in \emptyset, x \in E$ » est vraie (sa négation étant « $\exists x \in \emptyset, x \notin E$ » qui est fausse puisque $\emptyset$ ne contient aucun élément).

Propriété 1 (Transitivité de l'inclusion)

Si A, B et C sont trois ensembles tels que $A \subset B$ et $B \subset C$, alors $A \subset C$.

Définition.

Soit E un ensemble. On dit qu'un ensemble A est une *partie* de E ou un *sous-ensemble* de E si A est inclus dans E. L'ensemble de toutes les parties de E est noté $\mathscr{P}(E)$.

Exercice 1. Déterminer l'ensemble des parties des ensembles E et F suivants :

- $E = \{1, 2\}$;
- $F = \{1, 2, 3\}$.

Remarque. On aura toujours $\emptyset \in \mathscr{P}(E)$ et $E \in \mathscr{P}(E)$.

Danger.

Il est important de bien distinguer les deux symboles $\in$ et $\subset$: le premier concerne un élément appartenant à un ensemble, le second concerne un ensemble inclus dans un autre ensemble.

Par exemple, la notation $A \subset E$ a la même signification que $A \in \mathscr{P}(E)$.

Exercice 2. Compléter avec les symboles $\in$ ou $\subset$.

$$0 \ \dots\ [0,1]\ ;\ \{1\}\ \dots\ \{1,2,3\}\ ;\ \{3\}\ \dots\ \mathbb{N}\ ;\ [-1,1]\ \dots\ \mathbb{R}\ ;\ \{0,1\}\ \dots\ \mathscr{P}(\mathbb{N})\ ;\ \{0\}\ \dots\ \mathscr{P}(\{0,1\})$$

$$[0,1]\ \dots\ \mathscr{P}([0,1])\ ;\ \{[0,1]\cup[3,4]\}\ \dots\ \mathscr{P}(\mathbb{R})\ ;\ \mathbb{N}\ \dots\ \mathbb{Z}\ ;\ \mathbb{N}\ \dots\ \mathscr{P}(\mathbb{R})\ ;\ \emptyset\ \dots\ \{\emptyset\}.$$

Définition.

Soient E et F deux ensembles. On dit que E et F sont *égaux*, et on note $E = F$, lorsque E et F ont exactement les mêmes éléments :

$$\forall x,\ (x \in E \Leftrightarrow x \in F).$$

Propriété 2 (Égalité d'ensembles)

Soient E et F deux ensembles. Alors :

$$E = F \quad \Leftrightarrow \quad (E \subset F \text{ et } F \subset E).$$

Méthode. Comment montrer une égalité entre deux ensembles ?

On dispose de deux méthodes pour montrer que $E = F$:

- *soit par double inclusion en prouvant $E \subset F$ puis $F \subset E$;*
- *soit directement par équivalences, en prouvant que $x \in A \Leftrightarrow x \in B$.*

Exercice 3. Montrer par double inclusion que si $a < b$, alors : $\quad [a, b] = \{(1 - t)a + tb,\ t \in [0, 1]\}$.

Exercice 4. Montrer par équivalence que si A et B sont deux points distincts du plan, alors l'ensemble $E = \{M \mid MA = MB\}$ est la droite $\mathscr{D}$ orthogonale à $\overrightarrow{AB}$ et passant par le milieu I de $[AB]$.

1.3 Union et intersection

Dans toute le suite, la lettre E désigne un ensemble.

Définition.

Soient A et B deux éléments de $\mathscr{P}(E)$.

- L'*intersection de A et B* est l'ensemble, noté $A \cap B$, défini par :

$$A \cap B = \{x \in E \mid x \in A \text{ et } x \in B\}.$$

  En d'autres termes, l'intersection de A et de B est l'ensemble des éléments qui appartiennent à A et à B.

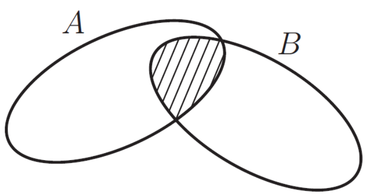
- L'*union de A et B* est l'ensemble, noté $A \cup B$, défini par :

$$A \cup B = \{x \in E \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}.$$

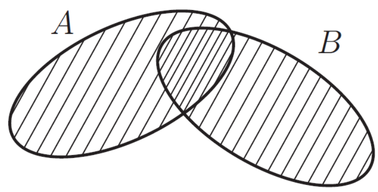
  En d'autres termes, l'union de A et de B est l'ensemble des éléments qui appartiennent à A ou à B.

Remarque. Le « ou » utilisé ici est inclusif : x est un élément de A ou un élément de B ou un élément de A et de B.

Diagramme de Venn.



$A \cap B$.



$A \cup B$.

Le saviez-vous ?

On doit les symboles $\cup$ et $\cap$ au mathématicien italien Giuseppe Peano, qu'il introduisit dans son *Formulaire mathématiques* publié en 1895. C'est également lui qui utilise le premier la lettre grecque epsilon $\in$, abréviation du grec « esti », il est, pour noter l'appartenance, et introduit le quantificateur existentiel $\exists$, renversant un E pour désigner l'initiale du mot italien « esists ».

Exemples.

- Si $A = \{1, 2, 3\}$ et $B = \{2, 3, 4\}$, alors $A \cup B = \{1, 2, 3, 4\}$ et $A \cap B = \{2, 3\}$.
- $\mathbb{R}_+^* \cup \mathbb{R}_- = \mathbb{R}$ et $\mathbb{R}_+^* \cap \mathbb{R}_- = \emptyset$.
- Les inclusions suivantes sont toujours satisfaites :

$$A \cap B \subset A \subset A \cup B \quad \text{et} \quad A \cap B \subset B \subset A \cup B.$$

Définition.

Soient E et I deux ensembles. Pour tout $i \in I$, on se donne A_i une partie de E. Alors on note :

- $\bigcap_{i \in I} A_i = \{x \in E \mid \forall i \in I,\ x \in A_i\}$ l'ensemble des éléments de E qui sont dans **tous** les A_i ;
- $\bigcup_{i \in I} A_i = \{x \in E \mid \exists i \in I,\ x \in A_i\}$ l'ensemble des éléments de E qui sont dans **au moins l'un** des A_i.

Remarque. Notons que si $I = \emptyset$, alors $\bigcap_{i \in I} A_i = E$ car la proposition « $\forall i \in I,\ x \in A_i$ » est vraie pour tout $x \in E$, et $\bigcup_{i \in I} A_i = \emptyset$ car « $\exists i \in I,\ x \in A_i$ » est fausse pour tout x.

Exercice 5. Considérons un point du plan M fixé, et pour $n \in \mathbb{N}$, notons D_n le disque de centre M et de rayon $\frac{1}{n}$. Montrer que $\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} D_n = \{M\}$.

Propriété 3 (Propriétés algébriques de l'intersection et l'union)

(1) L'intersection et l'union sont **commutatives** : pour tous $A, B \in \mathscr{P}(E)$,

$$A \cap B = B \cap A \quad \text{et} \quad A \cup B = B \cup A.$$

(2) L'intersection et l'union sont **associatives** : pour tous $A, B, C \in \mathscr{P}(E)$,

$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C = A \cap B \cap C,$$
$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C = A \cup B \cup C.$$

(3) E est **élément neutre** pour l'intersection : pour tout $A \in \mathscr{P}(E)$, $A \cap E = A$.
$\emptyset$ est **élément neutre** pour la réunion : pour tout $A \in \mathscr{P}(E)$, $A \cup \emptyset = A$.

(4) L'intersection et la réunion sont **distributives** l'une sur l'autre : pour tous $A, B, C \in \mathscr{P}(E)$,

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \quad \text{et} \quad A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

Plus généralement, si $\{B_i,\ i \in I\}$ est un ensemble de parties de E, alors :

$$A \cap \left(\bigcup_{i \in I} B_i\right) = \bigcup_{i \in I} (A \cap B_i) \quad \text{et} \quad A \cup \left(\bigcap_{i \in I} B_i\right) = \bigcap_{i \in I} (A \cup B_i).$$

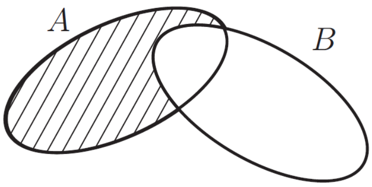
1.4 Complémentaire

Définition.

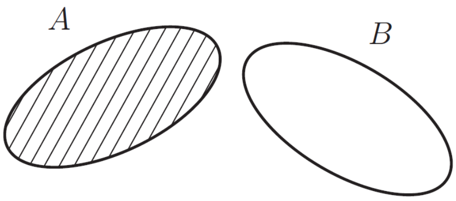
Soit A et B deux éléments de $\mathscr{P}(E)$. La *différence de A avec B* est l'ensemble, noté $A \setminus B$ (qui se lit « A privé de B » ou « A moins B »), de tous les éléments de A qui ne sont pas dans B. Autrement dit :

$$A \setminus B = \{x \in A \mid x \notin B\}.$$

Diagrammes de Venn.



$A \setminus B$
Cas où $A \cap B \neq \emptyset$



$A \setminus B$
Cas où $A \cap B = \emptyset$

Définition.

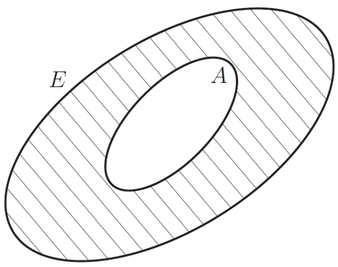
Soit $A \in \mathscr{P}(E)$. Le *complémentaire de* A *dans* E est l'ensemble, noté $\complement_E^A$, de tous les éléments de E qui ne sont pas dans A. Autrement dit :

$$\complement_E^A = \{x \in E \ | \ x \notin A\} = E \setminus A.$$

Notation.

S'il n'y a pas d'ambigüité sur l'ensemble E, on privilégiera la notation $\overline{A}$ ou A^c.

Diagramme de Venn de $\complement_E^A$.



Propriété 4 (Propriétés algébriques du complémentaire)

Soient A et B deux parties de E.

(1) $\overline{\overline{A}} = A$, $\overline{\emptyset} = E$, $\overline{E} = \emptyset$. (2) Si $A \subset B$, alors $\overline{B} \subset \overline{A}$. (3) $A \setminus B = A \cap \overline{B}$.

Exercice 6. Soient A et B deux parties d'un ensemble E. Montrer que $A \cap B = \emptyset \Leftrightarrow A \subset \overline{B}$.

Propriété 5 (Lois de De Morgan)

- Si A et B sont deux parties de E, alors :

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B} \text{ et } \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}.$$

- Plus généralement, si $\{A_i, \ i \in I\}$ est un ensemble de parties de E, alors :

$$\overline{\bigcap_{i \in I} A_i} = \bigcup_{i \in I} \overline{A_i} \quad \text{et} \quad \overline{\bigcup_{i \in I} A_i} = \bigcap_{i \in I} \overline{A_i}.$$

1.5 Recouvrement disjoint, partition

Définition.

- Soient A et B deux éléments de $\mathscr{P}(E)$. On dit que A et B sont *disjoints* si $A \cap B = \emptyset$.
- Soit $\{A_i,\ i \in I\}$ un ensemble de parties de E. On dit que les A_i sont *deux à deux disjoints* si :

$$\forall i, j \in I,\ (i \neq j \ \Rightarrow\ A_i \cap A_j = \emptyset)\,.$$

Notation.

Si A et B sont disjoints, on notera parfois leur union $A \sqcup B$ (ou $A \coprod B$) au lieu de $A \cup B$.
De même, pour un ensemble $\{A_i,\ i \in I\}$ de parties deux à deux disjointes de E, on pourra noter $\bigsqcup\limits_{i \in I} A_i$ (ou $\coprod\limits_{i \in I} A_i$) leur union $\bigcup\limits_{i \in I} A_i$.

Définition.

Soit E un ensemble. On appelle *recouvrement disjoint de* E tout ensemble $\{A_i,\ i \in I\}$ de parties de E satisfaisant :

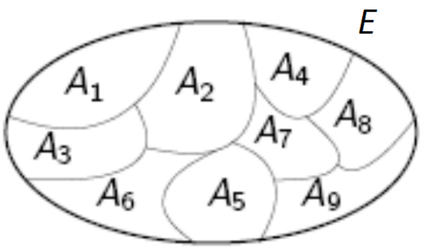
- $E = \bigcup\limits_{i \in I} A_i$;
- les A_i sont deux à deux disjoints.

Si de plus A_i est non vide pour tout $i \in I$, on dit que $\{A_i,\ i \in I\}$ est une *partition d'un ensemble* E.

Exemples.

- Si $A \in \mathscr{P}(E)$, alors $\{A, \overline{A}\}$ est un recouvrement disjoint de E. Si de plus $A \neq \emptyset$ et $A \neq E$, alors c'est une partition de E.
- L'ensemble $\{\{x\},\ x \in E\}$ des singletons de E est une partition de E.
- L'ensemble des groupes de colle constitue une partition de l'ensemble des élèves de MP2I.

Diagramme de Venn d'une partition de E.



Exercice 7. Donner toutes les partitions de l'ensemble $E = \{a, b, c\}$.

Exercice 8. Pour $t \in [0, 1[$, notons $A_t = \{x \in \mathbb{R} \mid x - \lfloor x \rfloor = t\}$. Montrer que $\{A_t,\ t \in [0, 1[\}$ est une partition de $\mathbb{R}$.

1.6 Lien entre logique et ensemble

Coté logique	Coté ensembles	En détails
Implication	Inclusion	$A \subset B \Leftrightarrow (x \in A \Rightarrow x \in B)$
Équivalence	Égalité	$A = B \Leftrightarrow (x \in A \Leftrightarrow x \in B)$
Conjonction (**et**)	Intersection	$x \in A \cap B \Leftrightarrow (x \in A \textbf{ et } x \in B)$ $x \in \bigcap\limits_{i \in I} A_i \Leftrightarrow (\forall i \in I,\, x \in A_i)$
Disjonction (**ou**)	Union	$x \in A \cup B \Leftrightarrow (x \in A \textbf{ ou } x \in B)$ $x \in \bigcup\limits_{i \in I} A_i \Leftrightarrow (\exists i \in I,\, x \in A_i)$
Négation	Complémentaire	$x \in \overline{A} \Leftrightarrow \textbf{non}\,(x \in A)$

On remarquera en particulier les associations d'idées $\bigcap$/**et**/$\forall$ et $\bigcup$/**ou**/$\exists$.

1.7 Produit cartésien

Définition.

Un *couple* est la donnée de deux objets dans un ordre déterminé. Le couple formé des éléments a et b, dans cet ordre, est noté (a, b).

Deux couples (a, b) et (c, d) sont égaux si, et seulement si, $a = c$ et $b = d$.

Pour aller plus loin.

On pourra se contenter de la définition précédente qui, bien que imprécise, nous suffira amplement en gardant à l'esprit que la seule chose vraiment importante est que deux couples sont égaux si, et seulement si, ils sont formés des mêmes éléments, dans le même ordre.

Si on souhaite définir rigoureusement le couple (a, b), on peut poser $(a, b) = \{a, \{a, b\}\}$. On vérifie alors que : $(a, b) = (c, d) \Leftrightarrow \begin{cases} a = c \\ b = d \end{cases}$.

Danger.

On ne confondra pas le couple (x, y) et l'ensemble $\{x, y\}$, qui sont deux éléments de natures différentes. En particulier, l'ordre des éléments d'un couple est important ($(2, 1) \neq (1, 2)$), alors que dans un ensemble, l'ordre n'a aucune importance ($\{1, 2\} = \{2, 1\}$).

Définition.

Soient E et F deux ensembles. Le *produit cartésien de E et F* est l'ensemble, noté $E \times F$, constitué de tous les couples (x, y) où x est un élément de E et y un élément de F. Ainsi :

$$E \times F = \{(x, y) \mid x \in E \text{ et } y \in F\}.$$

Si $E = F$, on note E^2 au lieu de $E \times E$.

Exemples.

- Puisque $\emptyset$ ne contient aucun élément, $\emptyset \times \emptyset$ est encore l'ensemble vide. Plus généralement, $\emptyset \times E = E \times \emptyset = \emptyset$ pour tout ensemble E.
- $\{1, 2, 3\} \times \{0, 1\} = \{(1, 0), (1, 1), (2, 0), (2, 1), (3, 0), (3, 1)\}$.
- $\mathbb{R}^2$ est l'ensemble des couples de réels. On peut le représenter graphiquement comme un plan muni d'un repère, tout couple (x, y) étant identifié au point de coordonnées (x, y).
  Si $I = [a, b]$ et $J = [c, d]$ sont deux segments de $\mathbb{R}$, alors $I \times J = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b \text{ et } c \leq y \leq d\}$ est un pavé de $\mathbb{R}^2$.

Définition.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, un *n-uplet* d'objets est la donnée de n objets dans un ordre déterminé. On note $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ le n-uplet formé des objets x_1, x_2, …, x_n, dans cet ordre.
Deux n-uplets $(x_1, \ldots, x_n)$ et $(y_1, \ldots, y_n)$ sont égaux si, et seulement si, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $x_i = y_i$.

Définition.

Soient $E_1, E_2, \ldots, E_n$ des ensembles. On appelle *produit cartésien de* $E_1, E_2, \ldots, E_n$, et on note $E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n$ ou encore $\prod_{i=1}^{n} E_i$, l'ensemble formé des n-uplets $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ où $x_1 \in E_1$, $x_2 \in E_2$,…, $x_n \in E_n$.
Ainsi :

$$E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid \forall i \in [\![1, n]\!],\ x_i \in E_i\}.$$

Si $E = E_1 = E_2 = \cdots = E_n$, on note E^n au lieu de $E \times \cdots \times E$.

Remarque. Soient E, F et G trois ensembles. Un élément de $(E \times F) \times G$ est de la forme $((x, y), z)$ avec $x \in E$, $y \in F$ et $z \in G$. On l'identifiera alors au triplet $(x, y, z) \in E \times F \times G$, de sorte qu'on ne fera pas la différence entre $(E \times F) \times G$ et $E \times F \times G$. De même pour $E \times (F \times G)$, et plus généralement pour des produits de plus de trois termes. Le produit cartésien d'ensembles est donc « associatif ».

2 Relations binaires

En mathématiques (et ailleurs), nous avons régulièrement envie de comparer plusieurs éléments, soit pour dire qu'ils partagent certaines propriétés, soit au contraire pour dire qu'ils diffèrent sur certains points. La notion de relation binaire est introduite pour cela.

2.1 Définitions

Définition.

Soit E un ensemble non vide. On appelle *relation binaire sur E* la donnée d'une partie $\mathscr{R}$ de $E \times E$.
Pour tout $(x, y) \in E \times E$, on dit que *x est en relation avec y* si $(x, y) \in \mathscr{R}$. On notera alors $x\mathscr{R}y$.

Exemples.

- Soit E un ensemble, et $\mathscr{R} = \{(x, x) \mid x \in E\}$. Pour tout $(x, y) \in E \times E$, $x\mathscr{R}y$ si, et seulement si, $x = y$.
- Prenons $E = [\![1, 3]\!]$ et $\mathscr{R} = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 2), (2, 3), (3, 3)\}$. Pour tout $(x, y) \in [\![1, 3]\!]^2$, $x\mathscr{R}y$ si, et seulement si, $x \leq y$.
- Prenons $E = [\![1, 4]\!]$ et $\mathscr{R} = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 2), (2, 4), (3, 3), (4, 4)\}$. Pour tout $(x, y) \in [\![1, 4]\!]^2$, $x\mathscr{R}y$ si, et seulement si, x divise y.

Définition.

Soit $\mathscr{R}$ une relation binaire sur E. On dit que $\mathscr{R}$ est :

- *réflexive* si : $\forall x \in E,\ x\mathscr{R}x$;
- *symétrique* si : $\forall (x, y) \in E^2,\ x\mathscr{R}y \Rightarrow y\mathscr{R}x$;
- *transitive* si : $\forall (x, y, z) \in E^3$, $x\mathscr{R}y$ et $y\mathscr{R}z \Rightarrow x\mathscr{R}z$;
- *antisymétrique* si : $\forall (x, y) \in E^2$, $x\mathscr{R}y$ et $y\mathscr{R}x \Rightarrow x = y$.

Exemples.

- La relation d'égalité sur un ensemble E est réflexive, symétrique, transitive, antisymétrique.
- La relation $\leq$ sur $\mathbb{R}$ est réflexive, transitive et antisymétrique, mais pas symétrique.
- La relation « être frontalier de », définie sur l'ensemble des pays est une relation symétrique, mais elle n'est pas transitive.

Exercice 9. Étudier la relation de divisibilité sur $\mathbb{Z}$: réflexivité, symétrie, transitivité, antisymétrie.

2.2 Relations d'équivalence

Définition.

On appelle *relation d'équivalence* sur un ensemble E toute relation binaire $\sim$ sur E à la fois réflexive, symétrique et transitive.

Exemples.

- La relation « être dans la même classe que » définie sur l'ensemble des élèves du Lycée Roosevelt, est une relation d'équivalence.
- La relation d'égalité sur un ensemble E est une relation d'équivalence.
- Notons $\overrightarrow{\mathscr{P}}$ l'ensemble des vecteurs du plan. La relation de colinéarité est une relation d'équivalence sur $\overrightarrow{\mathscr{P}} \setminus \left\{\overrightarrow{0}\right\}$.

Définition.

Soit $\sim$ une relation d'équivalence sur un ensemble E, et soit $x \in E$.
On appelle *classe d'équivalence de x pour $\sim$*, et on note $\mathrm{cl}(x)$ ou $\overline{x}$, la partie de E définie par :

$$\mathrm{cl}(x) = \overline{x} = \{y \in E \mid y \sim x\} \in \mathscr{P}(E).$$

Les éléments de $\mathrm{cl}(x) \in \mathscr{P}(E)$ sont appelés les *représentants de la classe de x*.

Propriété 6

Soit $\sim$ une relation d'équivalence sur un ensemble E.

(1) Pour tous $x, y \in E$, $\mathrm{cl}(x) = \mathrm{cl}(y)$ si, et seulement si, $x \sim y$.

(2) L'ensemble des classes d'équivalence forme une partition de E, c'est-à-dire :

(i) pour tout $x \in E$, $\mathrm{cl}(x) \neq \emptyset$;

(ii) pour tous $x, y \in E$ tels que $\mathrm{cl}(x) \neq \mathrm{cl}(y)$, on a $\mathrm{cl}(x) \cap \mathrm{cl}(y) = \emptyset$;

(iii) $E = \displaystyle\bigcup_{x \in E} \mathrm{cl}(x)$.

Définition.

On appelle *système de représentants* des classes d'équivalence de $\sim$ toute partie R de E qui contient un et un seul élément de chaque classe d'équivalence de $\sim$.
L'ensemble des classes d'équivalences de $\sim$ est appelé l'*ensemble quotient de E par $\sim$* et noté $E/\sim$.

Remarque. Si R désigne un système de représentants des classes d'équivalence de $\sim$, alors $E = \displaystyle\bigsqcup_{x \in R} \mathrm{cl}(x)$, réunion disjointe par définition de R.

Exemples.

- La classe d'équivalence d'un élève de Roosevelt pour la relation d'équivalence « être dans la même classe » est l'ensemble de ses camarades de classe (y compris lui). Un système de représentants des classes d'équivalences correspond à la désignation d'un délégué par classe.
- Pour tout $x \in E$, la classe d'équivalence de x pour la relation d'égalité est $\mathrm{cl}(x) = \{x\}$.

- La classe d'équivalence d'un vecteur $\overrightarrow{v} \in \overrightarrow{\mathscr{P}} \setminus \left\{\overrightarrow{0}\right\}$ pour la relation de colinéarité est la droite vectorielle dirigée par $\overrightarrow{v}$ privée du vecteur nul. Si pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on note $\overrightarrow{u_\theta}$ le vecteur unitaire du plan tel que $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{u_\theta}) \equiv \theta\,[2\pi]$, alors $R = \{\overrightarrow{u_\theta},\, \theta \in [0, \pi[\}$ est un système de représentants de ces classes d'équivalence (de même par exemple que $R = \left\{\overrightarrow{u_\theta},\, \theta \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]\right\}$).

Propriété 7

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La relation de congruence modulo n est une relation d'équivalence sur $\mathbb{Z}$.
Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $\overline{k} = k + n\mathbb{Z}$, et $R = [\![0, n-1]\!]$ est un système de représentants des classes d'équivalence.

2.3 Relations d'ordre

Définition.

On appelle *relation d'ordre* sur un ensemble E toute relation binaire $\preceq$ sur E à la fois réflexive, transitive et antisymétrique. On dit alors que le couple $(E, \preceq)$ est un *ensemble ordonné*.

Exemples.

- La relation $\leq$ est une relation d'ordre sur $\mathbb{R}$.
- Si E est un ensemble, la relation d'inclusion $A \subset B$ est une relation d'ordre sur $\mathscr{P}(E)$.
- La relation de divisibilité n'est pas une relation d'ordre sur $\mathbb{Z}$ puisqu'elle n'est pas antisymétrique : par exemple $-1 \mid 1$ et $1 \mid -1$ alors que $1 \neq -1$. En revanche, c'est une relation d'ordre sur $\mathbb{N}$, et $(\mathbb{N}, \mid)$ est un ensemble ordonné.

Notation.

Si $\preceq$ est une relation d'ordre sur E, on note souvent $x \prec y$ pour signifier que $x \preceq y$ **et** $x \neq y$. Cette relation est encore transitive, mais ce n'est plus une relation d'ordre, notamment du fait qu'elle n'est plus réflexive : on n'a jamais $x \prec x$.

Exercice 10. Soit $(E, \leq)$ un ensemble ordonné. On définit une relation binaire $\preceq$ sur $E \times E$ en posant :

$$\forall (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in E \times E, \quad (x_1, y_1) \preceq (x_2, y_2) \;\Leftrightarrow\; x_1 \prec x_2 \textbf{ ou } \begin{cases} x_1 = x_2 \\ y_1 \leq y_2 \end{cases}.$$

Montrer que $\preceq$ est une relation d'ordre sur $E \times E$, appelée *ordre lexicographique*.

Remarque. Cette relation se généralise sans grande difficulté à E^n. Remarquons que c'est exactement l'ordre qu'on utilise dans un dictionnaire (d'où le nom) : on compare les premières lettres, si elles sont égales on compare les deuxièmes, etc.

Définition.

Soit $(E, \preceq)$ un ensemble ordonné.
Deux éléments x et y de E sont dits *comparables* si $x \preceq y$ ou $y \preceq x$. Ils sont dits *incomparables* sinon.
La relation d'ordre $\preceq$ est dite *totale* si tous les éléments de E sont comparables, c'est-à-dire pour tout $(x, y) \in E^2$, $x \preceq y$ ou $y \preceq x$. On parle alors d'*ensemble totalement ordonné*.
Dans le cas contraire, on dit que $\preceq$ est un *ordre partiel*, et que $(E, \preceq)$ est *partiellement ordonné*.

Exemples.

- $(\mathbb{R}, \leq)$ est un ensemble totalement ordonné.
- Sur $\mathscr{P}(E)$, la relation d'inclusion est un ordre partiel dès que E possède au moins deux éléments, car si x et y sont deux éléments distincts de E, on n'a ni $\{x\} \subset \{y\}$, ni $\{y\} \subset \{x\}$.
- La relation de divisibilité sur $\mathbb{N}$ est un ordre partiel car on n'a ni $2 \mid 3$, ni $3 \mid 2$.

Exercice 11. Soit $(E, \leq)$ un ensemble totalement ordonné. Montrer que $E \times E$ muni de l'ordre lexicographique $\preceq$ est totalement ordonné.

2.4 Majorant, minorant, maximum, minimum

Les définitions qui suivent ont déjà été données pour $(\mathbb{R}, \leq)$. On les étend au cas d'un ensemble ordonné quelconque $(E, \preceq)$.

Définition.

Soient $(E, \preceq)$ un ensemble ordonné et $A \subset E$.

- A est *majorée* si : $\exists a \in E, \forall x \in A, x \preceq a.$

  Si A est majorée, on appelle *majorant* de A tout élément a de E satisfaisant : $\forall x \in A, x \preceq a.$
- A est *minorée* si : $\exists b \in E, \forall x \in A, b \preceq x.$

  Si A est minorée, on appelle *minorant* de A tout élément b de E satisfaisant : $\forall x \in A, b \preceq x.$
- A est *bornée* lorsque A est à la fois majorée et minorée.

Danger.

Un majorant de A n'est pas nécessairement unique, et n'a pas besoin d'appartenir à A

Exemples.

- Pour l'ordre usuel sur $\mathbb{R}$, 1 est un majorant de $]0, 1[$. Tout réel supérieur ou égal à 1 est également un majorant de $]0, 1[$.
- Pour la relation de divisibilité sur $\mathbb{N}$, les minorants de l'ensemble $\{8, 10, 12\}$ sont 1 et 2. Et $k \in \mathbb{N}$ est un majorant si, et seulement si, $8 \mid k$, $10 \mid k$ et $12 \mid k$, ce qui équivaut à $120 \mid k$.

Propriété 8

Soient $(E, \preceq)$ un ensemble ordonné et $A \subset E$.

- Si A est majorée et possède un majorant qui est dans A, alors celui-ci est unique.

  Un tel élément, s'il existe, s'appelle *maximum* de A et on le note $\max(A)$.
- Si A est minorée et possède un minorant qui est dans A, alors celui-ci est unique.

  Un tel élément, s'il existe, s'appelle *minimum* de A et on le note $\min(A)$.

Danger.

Une partie d'un ensemble ordonné n'a pas forcément de plus grand ou de plus petit élément. Par exemple, pour l'ordre usuel sur $\mathbb{R}$, $]0, 1[$ n'a ni plus grand ni plus petit élément. Il en est de même pour $\mathbb{R}$.

Exemples.

- Dans $(\mathbb{N}, \mid)$, l'ensemble $\{8, 10, 12\}$ ne possède ni plus grand élément, ni plus petit élément.
- Toujours dans $(\mathbb{N}, \mid)$, 0 est le plus grand élément de $\mathbb{N}$, et 1 est son plus petit élément.
- L'ensemble ordonné $(\mathscr{P}(E), \subset)$ possède un plus grand élément qui est E, et un plus petit élément qui est $\emptyset$.

Intéressons nous enfin à $\mathbb{N}$ muni de l'ordre usuel. Rappelons que toute partie non vide de $\mathbb{N}$ possède un plus petit élément, et que cette propriété fondamentale de $\mathbb{N}$ permet d'établir le principe de récurrence. On en déduit également la propriété suivante.

Propriété 9

- Toute partie non vide et majorée de $\mathbb{N}$ possède un plus grand élément.
- Toute partie non vide et majorée de $\mathbb{Z}$ possède un plus grand élément.

2.5 Borne supérieure, borne inférieure

Définition.

Soient $(E, \preceq)$ un ensemble ordonné et $A \in \mathscr{P}(E)$.

- Supposons A majorée. S'il existe, on appelle *borne supérieure de* A le plus petit des majorants de A. On le note $\sup(A)$.
- Supposons A minorée. S'il existe, on appelle *borne inférieure de* A le plus grand des minorants de A. On le note $\inf(A)$.

Remarques. Par définition :

$$\sup(A) = \min\{a \in E \mid a \text{ est un majorant de } A\} = \min\{a \in E \mid \forall x \in A,\, x \preceq a\}.$$

Ainsi, **sous réserve d'existence**, une telle borne supérieure est unique en tant que plus petit élément de l'ensemble des majorants de A. De plus, on dispose des caractérisations suivantes de $\sup(A)$:

$$a = \sup(A) \Leftrightarrow \begin{cases} a \text{ est un majorant de } A \\ a \text{ est plus petit que tous les majorants de } A \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \text{ est un majorant de } A \\ \text{pour tout majorant } m \text{ de } A,\, a \preceq m \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in A,\, x \leq a \\ \forall m \in E,\, \underbrace{(\forall x \in E,\, x \in A \Rightarrow x \leq m)}_{m \text{ majorant de } A} \Rightarrow a \leq m \end{cases}$$

Exemples.

- Pour l'ordre usuel sur $\mathbb{R}$, $]0, 1[$ possède une borne supérieure qui vaut 1 et une borne inférieure qui vaut 0.
- Dans $(\mathbb{N}, \mid)$, l'ensemble $\{8, 10, 12\}$ possède une borne inférieure qui est 2 et une borne supérieure qui est 120.
- Une partie peut-être majorée sans avoir de borne supérieure. Prenons par exemple l'ensemble ordonné $(\mathbb{Q}, \leq)$ et la partie
$$A = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 \leq 2\} = \left[-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right] \bigcap \mathbb{Q}.$$
La partie A est majorée, par exemple par $2 \in \mathbb{Q}$, et l'ensemble des majorants de A est $\left]\sqrt{2}, +\infty\right[\bigcap \mathbb{Q}$. Celui-ci n'admettant pas de plus petit élément, A n'admet pas de borne supérieure. C'est d'ailleurs l'une des insuffisances de $\mathbb{Q}$ qui motivera dans un prochain chapitre l'introduction des réels.

Exercice 12. On considère l'ensemble ordonné $(\mathscr{P}(E), \subset)$, et deux parties A et B de E. Déterminer, si elles existent, les bornes supérieures et inférieures de $\{A, B\}$.

Propriété 10

Si A possède un plus grand (resp. petit) élément, alors A possède une borne supérieure (resp. inférieure) et $\sup(A) = \max(A)$ (resp. $\inf(A) = \min(A)$).