Chapitre 17

Calcul matriciel

Compétences attendues.

- ✓ Connaitre les structures algébriques des ensembles de matrices.
- ✓ Calculer des produits de matrices, des puissances de matrices carrées.
- ✓ Déterminer si une matrice A est inversible, et si c'est le cas, calculer A^{-1}.

Anthony Mansuy - Professeur en MP2I au Lycée Roosevelt (Reims)
Page personnelle : `anthony-mansuy.fr/`
E-mail : `mansuy.anthony@hotmail.fr`

1 Matrices et opérations sur les matrices

Dans tout le chapitre, $\mathbb{K}$ désigne l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ ou des nombres complexes $\mathbb{C}$, n, p, q et r des entiers supérieurs ou égaux à 1. Les éléments de $\mathbb{K}$ sont appelés des *scalaires*.

1.1 Définitions

Définition.

On appelle *matrice à n lignes et p colonnes à coefficients dans* $\mathbb{K}$ toute famille $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq p}}$ d'éléments de $\mathbb{K}$ indexée par $[\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]$. On représente cette matrice sous forme d'un tableau de la manière suivante :

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,p} \end{pmatrix}.$$

Pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]$, le scalaire $a_{i,j}$ est appelé *coefficient d'indice (i,j) de A*, aussi noté $[A]_{i,j}$, la matrice $\begin{pmatrix} a_{i,1} & \dots & a_{i,p} \end{pmatrix}$ est la $i^{\text{ème}}$ *ligne de A* et la matrice $\begin{pmatrix} a_{1,j} \\ \vdots \\ a_{n,j} \end{pmatrix}$ sa $j^{\text{ème}}$ *colonne*.

L'ensemble des matrices de *taille* (n,p), c'est-à-dire à n lignes et p colonnes, est noté $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

Remarque. Par définition, deux matrices sont égales si, et seulement si, elles sont de même taille et tous leurs coefficients sont égaux.

Exemple. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & -1 & 5 \end{pmatrix}$ est une matrice de taille $(2,3)$ telle que $[A]_{1,2} = 0$ et $[A]_{2,3} = 5$.

Exemple. Dans $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, on définit pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]$ la matrice notée $E_{i,j}$ suivante :

$$E_{i,j} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

où l'unique coefficient non nul égal à 1 est en position (i,j). Les $n \times p$ matrices $E_{i,j}$ sont appelées *matrices élémentaires*.

Définition.

- Lorsque $n = p$, on parle de *matrices carrées de taille n*, et on note $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ au lieu de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
  Si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, la famille $([A]_{1,1}, \dots, [A]_{n,n})$ est appelée *diagonale de A*.
- Les matrices de taille $(n,1)$ sont appelées *matrices colonnes de taille n*, et les matrices de taille $(1,p)$ des *matrices lignes de taille p*.

Définition.

- La *matrice nulle* de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est la matrice dont tous les coefficients sont nuls. On la note $0_{n,p}$, ou simplement 0_n si $n = p$.
- La *matrice identité d'ordre* n est la matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, notée I_n, dont tous les coefficients diagonaux sont égaux à 1, les autres étant égaux à 0 :

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Notation.

Il sera particulièrement utile dans ce chapitre d'utiliser le *symbole de Kronecker*, défini par :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!], \quad \delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}.$$

Avec cette notation, on peut récrire $I_n = (\delta_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ et $E_{i,j} = (\delta_{k,i}\delta_{\ell,j})_{\substack{1 \leq k \leq n \\ 1 \leq \ell \leq p}}$.

1.2 L'espace vectoriel $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

Définition.

Soient $A, B \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$ un scalaire. On définit les matrices $A + B$ et $\lambda \cdot A$ de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ par :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!], \quad [A+B]_{i,j} = [A]_{i,j} + [B]_{i,j} \quad \text{et} \quad [\lambda \cdot A]_{i,j} = \lambda \times [A]_{i,j}.$$

Mise en garde.

L'addition de deux matrices de tailles différentes n'est pas définie.

Exemple. Calculer $2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 3 \\ -\frac{1}{2} & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -5 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} =$

Propriété 1 (de l'addition)

L'addition dans $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ satisfait les propriétés suivantes :

(1) Elle est *associative* : $\forall (A,B,C) \in (\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K}))^3$, $(A+B)+C = A+(B+C)$.
La somme de trois matrices A, B, C pourra ainsi être notée $A + B + C$ sans parenthèse.

(2) Elle est *commutative* : $\forall (A,B) \in (\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K}))^2$, $A + B = B + A$.

(3) Elle admet $0_{n,p}$ pour *élément neutre* : $\forall A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $0_{n,p} + A = A + 0_{n,p} = A$.

(4) Tout élément $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ admet un *symétrique* : $\exists B \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $B + A = A + B = 0_{n,p}$.
Un tel élément est unique : c'est $(-1) \cdot A$, que l'on notera plus simplement $-A$.

Propriété 2 (du produit par un scalaire)

Soient $A, B \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ des scalaires. Alors :

(1) $\lambda \cdot (A + B) = \lambda \cdot A + \lambda \cdot B$;

(2) $(\lambda + \mu) \cdot A = \lambda \cdot A + \mu \cdot A$;

(3) $\lambda \cdot (\mu \cdot A) = (\lambda\mu) \cdot A$.

Propriété 3 (Base canonique des matrices élémentaires de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$)

Soit $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq p}} \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Alors :

$$A = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p} a_{i,j}E_{i,j}.$$

On dit que A s'écrit comme une *combinaison linéaire des matrices* $E_{i,j}$.
Cette écriture est de plus unique : pour toute famille $(\lambda_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq p}}$ de scalaires, si :

$$A = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p} \lambda_{i,j}E_{i,j},$$

alors $\lambda_{k,\ell} = a_{k,\ell}$ pour tout $(k, \ell) \in [\![1, n]\!] \times [\![1, p]\!]$.

Exemple. Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & -1 & 5 \end{pmatrix}$, alors : $\quad A = E_{1,1} - 2E_{1,3} + 3E_{2,1} - E_{2,2} + 5E_{2,3}$.

1.3 Produit matriciel

Définition.

Soient $A \in \mathscr{M}_{n,\boldsymbol{p}}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathscr{M}_{\boldsymbol{p},q}(\mathbb{K})$. On définit la matrice $C = A \times B$ de $\mathscr{M}_{n,q}(\mathbb{K})$ par :

$$\forall (i,j) \in [\![1, n]\!] \times [\![1, q]\!], \quad [C]_{i,j} = \sum_{k=1}^{p} [A]_{i,k} \times [B]_{k,j}$$

Danger.

Pour pouvoir effectuer le produit de A par B, il faut impérativement que le nombre de colonnes de A soit égal au nombre de lignes de B.

Exercice 1. On considère les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & -4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calculer, s'ils sont définis, les produits deux à deux de ces matrices.

Propriété 4 (du produit matriciel)

Le produit matriciel satisfait les propriétés suivantes :

(1) Il est *associatif* : pour tout $(A, B, C) \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \times \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K}) \times \mathscr{M}_{q,r}(\mathbb{K})$,

$$(A \times B) \times C = A \times (B \times C).$$

Ainsi, le produit de trois matrices A, B et C pourra être noté $A \times B \times C$ sans parenthèses.

(2) Il est *bilinéaire* : pour tous $A, A' \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $B, B' \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$,

$$A \times (\lambda \cdot B + \mu \cdot B') = \lambda \cdot (A \times B) + \mu \cdot (A \times B') \quad \text{et} \quad (\lambda \cdot A + \mu \cdot A') \times B = \lambda \cdot (A \times B) + \mu \cdot (A' \times B).$$

(3) Pour tous $(A, B) \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \times \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$: $\quad \lambda \cdot (A \times B) = (\lambda \cdot A) \times B) = A \times (\lambda \cdot B)$.

(4) Pour tout $A \in \mathscr{M}_{n,p}$: $\quad I_n \times A = A \times I_p = A \quad$ et $\quad 0_n \times A = A \times 0_p = 0_{n,p}$.

Danger.

- Le produit matriciel **n'est pas commutatif**, comme le montre l'exemple suivant :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

  Notons cependant que la matrice I_n, et plus généralement les matrices $\lambda \cdot I_n$ avec $\lambda \in \mathbb{K}$, commutent avec toutes les matrices carrées de taille n.

- Un produit de matrices peut être nul sans qu'aucune d'entre elles le soit. Par exemple :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Propriété 5 (Multiplication par une ligne ou une colonne)

Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Pour tous $i \in [\![1, n]\!]$ et $j \in [\![1, p]\!]$:

$$A \times \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \leftarrow \text{Position } j \\ \\ \\ \end{matrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Position } i}}{1} & \cdots & 0 \end{pmatrix} \times A$$

sont respectivement la j-ème colonne de A et sa i-ème ligne.

Plus généralement, pour tout $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K})$: $\quad AX = x_1 C_1 + \cdots + x_p C_p$.

Exemple. $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix} = 5 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + 6 \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Astuce.

Il peut être utile pour certains calculs d'effectuer un produit matriciel colonne par colonne :

$$AB = \begin{pmatrix} AC_1(B) & \dots & AC_q(B) \end{pmatrix}$$

en notant $C_1(B), \cdots, C_q(B)$ les colonnes de B.

Exercice 2. Montrer l'égalité suivante dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, où $i, j, k, \ell \in [\![1, n]\!]$:

$$E_{i,j} \times E_{k,\ell} = \delta_{j,k} E_{i,\ell}.$$

1.4 Transposée

Définition.

Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On appelle *transposée de* A la matrice de $\mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{K})$, notée $A^\top$ ou ${}^tA$, définie par :

$$\forall (i,j) \in [\![1,p]\!] \times [\![1,n]\!], \quad [A^\top]_{i,j} = [A]_{j,i}.$$

Autrement dit, $A^\top$ est obtenue à partir de A par échange de ses lignes et de ses colonnes.

Exemple. $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 5 & -4 & 2 \end{pmatrix}^\top = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & -4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$

Propriété 6 (de la transposition)

(1) *Involutivité* : $\quad \forall A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K}), \quad \left(A^\top\right)^\top = A.$

(2) *Linéarité* : $\quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \forall (A,B) \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})^2, \quad (\lambda \cdot A + \mu \cdot B)^\top = \lambda \cdot A^\top + \mu \cdot B^\top.$

(3) Effet sur un produit : $\quad \forall A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K}), \forall B \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K}), \quad (A \times B)^\top = B^\top \times A^\top.$

Définition.

Une matrice carrée A est dite :

- *symétrique* si $A^\top = A$;
- *antisymétrique* si $A^\top = -A$.

On notera $\mathscr{S}_n(\mathbb{K})$ (resp. $\mathscr{A}_n(\mathbb{K})$) l'ensemble des matrices symétriques (resp. antisymétriques) de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

Exemple. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & -1 \\ 4 & -1 & 5 \end{pmatrix}$ est symétrique, $\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ est antisymétrique.

Remarque. La diagonale d'une matrice antisymétrique est toujours nulle.

2 Systèmes linéaires

2.1 Écriture matricielle d'un système linéaire

Considérons le système $(\mathscr{S})$ suivant à n équations et p inconnues à coefficients dans $\mathbb{K}$:

$$(\mathscr{S}) : \left\{ \begin{array}{ccc} a_{1,1}x_1 + \cdots + a_{1,p}x_p & = & b_1 \\ a_{2,1}x_1 + \cdots + a_{2,p}x_p & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1}x_1 + \cdots + a_{n,p}x_p & = & b_n \end{array} \right.$$

On appelle *système homogène associé à* $(\mathscr{S})$ le système $(\mathscr{S}_0)$ obtenu en remplaçant le second membre $(b_1, \dots, b_n)$ par $(0, \dots, 0)$.

Définition.

On appelle *matrice des coefficients de* $(\mathscr{S})$ la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,p} \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K}).$$

On note $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_p \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ la *matrice colonne des seconds membres*, et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ la *matrice colonne des inconnues.*

Propriété 7

Avec les notations introduites précédemment :

$$(x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{K}^p \text{ est solution de } (\mathscr{S}) \iff X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K}) \text{ est solution de } AX = B.$$

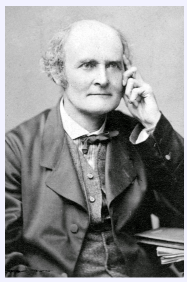
Propriété 8 (CNS de compatibilité)

Le système $AX = B$ est compatible (c'est-à-dire admet des solutions) si, et seulement si, B est combinaison linéaire des colonnes de A.

Le saviez-vous ?

Le mot *matrice* est formé sur le mot latin *mater* qui signifie *mère*. Il apparait au Moyen Âge dans son sens anatomique d'utérus. Comme on enregistrait les enfants à la naissance, il désigna rapidement le registre où on les inscrivait, d'où les mots *matricule* et *immatriculation*.

Au début de l'imprimerie, *matrice* désignait le moule à imprimer sur lequel on place les caractères. Par analogie, James Joseph Sylvester (1814 - 1897) utilisa ce mot pour nommer le tableau où l'on enregistre les coefficients d'un système linéaire. Son ami Arthur Cayley (1821 - 1895) introduisit les opérations usuelles du calcul matriciel (addition, multiplication), et jeta les bases de la théorie des matrice.



Arthur Cayley (1821 - 1895).

2.2 Structure des solutions d'un système linéaire

Propriété 9 (Structure des solutions d'un système homogène)

Soit $(\mathscr{S}_0)$ un système **homogène** de n équations à p inconnues, d'écriture matricielle $AX = 0_{n,1}$. Alors l'ensemble E_0 de ses solutions est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K})$, c'est-à-dire :

(1) $0_{p,1}$ appartient à E_0 ;

(2) pour tous X_1, X_2 dans E_0, pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$:

$$\lambda \cdot X_1 + \mu \cdot X_2 \in E_0.$$

Propriété 10 (Structure des solutions d'un système avec second membre)

Soit $(\mathscr{S})$ un système de n équations à p inconnues d'écriture matricielle $AX = B$, $(\mathscr{S}_0)$ son système homogène associé. Notons E (resp. E_0) l'ensemble des solutions de $(\mathscr{S})$ (resp. $(\mathscr{S}_0)$).
Soit $X_0 \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ une solution particulière de $(\mathscr{S})$. Alors pour tout $X \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K})$:

$$X \in E \quad \Leftrightarrow \quad X - X_0 \in E_0.$$

Ainsi : $\qquad E = X_0 + E_0 = \{X_0 + Y,\ Y \in E_0\}.$

Exercice 3. Résoudre le système $(\mathscr{S})$: $\begin{cases} x - y + z = 1 \\ x + 2y + z = -2 \end{cases}$.

2.3 Matrices d'opérations élémentaires

Définition.

On appelle *opération élémentaire sur les lignes d'une matrice* l'une des trois opérations suivantes :

(i) multiplication d'une ligne L_i par un scalaire α non nul, qu'on notera $L_i \leftarrow \alpha \cdot L_i$;

(ii) ajout de $\beta \cdot L_j$ à L_i avec $i \neq j$, qu'on notera $L_i \leftarrow L_i + \beta \cdot L_j$ où $\beta \in \mathbb{K}$;

(iii) échange des lignes L_i et L_j avec $i \neq j$, qu'on notera $L_i \leftrightarrow L_j$;

Rédaction.

Comme pour les systèmes, on précisera bien à chaque étape les opérations élémentaires qu'on a effectuées pour passer d'une matrice à une autre.

Remarque. L'opération élémentaire (iii) n'est pas nécessaire car elle peut être réalisée à partir des deux premières. En effet, l'échange des lignes i et j peut être obtenu ainsi :

- Étape 1 : on effectue $L_i \leftarrow L_i - L_j$;
- Étape 2 : on effectue $L_j \leftarrow L_j + L_i$;
- Étape 3 : on effectue $L_i \leftarrow L_i - L_j$;
- Étape 4 : on effectue $L_i \leftarrow -L_i$.

Les contenus successifs des lignes i et j (dans cet ordre) sont alors :

$$(L_i, L_j) \to (L_i - L_j, L_j) \to (L_i - L_j, L_i) \to (-L_j, L_i)$$

Définition.

On définit les *matrices d'opérations élémentaires* suivantes :

- on appelle *matrice de dilatation* toute matrice $D_i(\alpha) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ de la forme suivante, où $i \in [\![1, n]\!]$ et $\alpha \in \mathbb{K}$ différent de 0 :
$$D_i(\alpha) = I_n + (\alpha - 1)E_{i,i}.$$
- on appelle *matrice de transvection* toute matrice $T_{i,j}(\beta) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ de la forme suivante, où $(i,j) \in [\![1, n]\!]^2$ tel que $i \neq j$ et $\beta \in \mathbb{K}$:
$$T_{i,j}(\beta) = I_n + \beta E_{i,j}.$$
- on appelle *matrice de transposition* toute matrice $P_{i,j} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ de la forme suivante, où $(i,j) \in [\![1, n]\!]^2$ tel que $i < j$:
$$P_{i,j} = (I_n - E_{i,i} - E_{j,j}) + E_{i,j} + E_{j,i}.$$

Exemple. Pour $n = 3$ par exemple :

$$D_1(\alpha) = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad T_{1,3}(\beta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad P_{1,2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Propriété 11

Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Alors :

(1) $D_i(\alpha)A$ est la matrice obtenue en effectuant $L_i \leftarrow \alpha \cdot L_i$ sur les lignes de A.

(2) $T_{i,j}(\beta)A$ est la matrice obtenue en effectuant $L_i \leftarrow L_i + \beta \cdot L_j$ sur les lignes de A.

(3) $P_{i,j}A$ est la matrice obtenue en effectuant $L_i \leftrightarrow L_j$ sur les lignes de A.

Astuce.

Puisque $T_{i,j}(\beta) = T_{i,j}(\beta) \times I_n$, $T_{i,j}(\beta)$ est la matrice obtenue en appliquant $L_i \leftarrow L_i + \beta \cdot L_j$ à I_n. Cette remarque permet de retrouver l'expression de $T_{i,j}(\beta)$. Elle vaut également pour les matrices $D_i(\alpha)$ et $P_{i,j}$.

Définition.

On dit que deux matrices A et B de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ sont *équivalentes par lignes*, et on note $A \overset{\mathscr{L}}{\sim} B$, si on peut passer de A à B par une suite d'opérations élémentaires sur les lignes de A.

Remarque. Par ce qui précède, A et B sont équivalentes par ligne si, et seulement si, il existe des matrices d'opérations élémentaires $M_1, M_2, \dots, M_k$ telles que $A = M_k \cdots M_2 M_1 B$.

2.4 Traduction matricielle de l'algorithme de Gauss-Jordan

Définition.

Une matrice est dite *échelonnée par lignes* si chaque ligne non nulle commence par strictement plus de zéros que la ligne précédente, c'est-à-dire si elle est de la forme générale suivante :

$$E = \begin{pmatrix} 0 & \oplus & * & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & \oplus & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \oplus & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \oplus & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

où $\oplus$ sont des réels non nuls et $*$ sont des réels.

Les réels $\oplus$ sont appelés les *pivots* de la matrice échelonnée par lignes. Ce sont les premiers coefficients non nuls de chaque ligne non nulle.

Exemple. $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -4 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est échelonnée par lignes, avec 1, 2 et 7 pour pivots, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ n'est pas échelonnée par lignes.

Théorème 12

Pour toute matrice $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, il existe une matrice E produit de matrices d'opérations élémentaires, et une matrice échelonnée par lignes R telles que $E \times A = R$.

Exercice 4. Soit $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$. Déterminer une matrice E produit de matrices d'opérations élémentaires, et une matrice R échelonnée par lignes telles que $E \times A = R$.

2.5 Opérations sur les colonnes

Définition.

De manière analogue, on définit les trois opérations élémentaires suivantes sur les colonnes d'une matrice :

- multiplication d'une colonne C_i par un scalaire α non nul qu'on notera $C_i \leftarrow \alpha \cdot C_i$;
- ajout de $\beta \cdot C_j$ à C_i avec $i \neq j$, qu'on notera $C_i \leftarrow C_i + \beta \cdot C_j$ où $\beta \in \mathbb{K}$;
- échange des colonnes C_i et C_j avec $i \neq j$, qu'on notera $C_i \leftrightarrow C_j$.

Définition.

On dit que deux matrices A et B de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ sont *équivalentes par colonnes*, et on note $A \overset{\mathscr{C}}{\sim} B$, si on peut passer de A à B par une suite d'opérations élémentaires sur les colonnes de A.

Propriété 13

Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Alors :

(1) $AD_i(\alpha)$ est la matrice obtenue en effectuant $C_i \leftarrow \alpha \cdot C_i$ sur les colonnes de A ;

(2) $AT_{i,j}(\beta)$ est la matrice obtenue en effectuant $C_j \leftarrow C_j + \beta \cdot C_i$ sur les colonnes de A ;

(3) $AP_{i,j}$ est la matrice obtenue en effectuant $C_i \leftrightarrow C_j$ sur les colonnes de A.

Remarque. On retiendra bien que :

Opérations élémentaires …	Multiplication par des matrices d'opérations élémentaires …
… sur les lignes	… à gauche
… sur les colonnes	… à droite

Mise en garde.

Pour résoudre un système linéaire, on fera des opérations élémentaires **uniquement sur les lignes** de la matrice associée, jamais sur les colonnes. En effet, les opérations sur les lignes correspondent à celles qu'on effectue sur le système pour sa résolution. À l'inverse, agir sur les colonnes correspondrait à modifier les inconnues du système, et donc à changer l'ensemble des solutions.

3 Matrices carrées

3.1 L'algèbre $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ des matrices carrées

Propriété 14

L'addition matricielle et le produit matriciel sont des *lois de compositions internes* sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, c'est-à-dire pour tous $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$:

$$A + B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \quad \text{et} \quad A \times B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}).$$

Rappelons entre autres que :

- l'addition est associative, commutative, et qu'elle admet pour élément neutre la matrice nulle 0_n ;
- le produit est associatif, distributif par rapport à l'addition, et qu'il admet pour élément neutre I_n.

On dit que $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ muni de l'addition, du produit par un scalaire et du produit matriciel est une *algèbre sur* $\mathbb{K}$. Elle est de plus :

- non commutative : en général, $A \times B \neq B \times A$ pour $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$;
- non intègre : il existe des matrices $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ non nulles et telles que $A \times B = 0_n$.

3.2 Matrices carrées particulières

Définition.

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice carrée. On dit que :

- A est une *matrice scalaire* s'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $A = \lambda \cdot I_n$;
- A est une *matrice diagonale* si $[A]_{i,j} = 0$ pour tous $i \neq j$;
- A est *triangulaire supérieure* (resp. *triangulaire inférieure*) si $[A]_{i,j} = 0$ pour tous $i > j$ (resp. $i < j$), c'est-à-dire si tous ses coefficients situés en dessous (resp. au dessus) de sa diagonale sont nuls ;
- A est *triangulaire supérieure stricte* (resp. *inférieure stricte*) si A est triangulaire supérieure (resp. inférieure) et si de plus sa diagonale est nulle.

Notation.

Pour $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ des scalaires, on note $\operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ la matrice diagonale $\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$.

Exemples. $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ est triangulaire supérieure, $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 0 \end{pmatrix}$ est triangulaire inférieure stricte.

Propriété 15

Le produit de deux matrices A et B diagonales (resp. triangulaires supérieures (strictes), resp. triangulaires inférieures (strictes)) est diagonale (resp. triangulaire (stricte)). De plus, les coefficients diagonaux de AB sont les produits des coefficients diagonaux de A et de B.

Ainsi, dans le cas par exemple des matrices triangulaires supérieures :

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & & \cdots & \\ 0 & a_{2,2} & (*) & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n,n} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_{1,1} & & \cdots & \\ 0 & b_{2,2} & (*) & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & b_{n,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1}b_{1,1} & & \cdots & \\ 0 & a_{2,2}b_{2,2} & (*) & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n,n}b_{n,n} \end{pmatrix}$$

3.3 Puissances d'une matrice

Définition.

Pour tout entier $k \in \mathbb{N}$ et pour toute matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, on appelle *puissance k-ème* de A la matrice notée A^k définie par :

- si $k = 0$, $A^0 = I_n$;
- si $k \geq 1$, $A^k = \underbrace{A \times \cdots \times A}_{k \text{ fois}}$.

Propriété 16 (Puissance d'une matrice triangulaire ou diagonale)

Soit A une matrice triangulaire supérieure (resp. triangulaire inférieure, resp. diagonale), dont les coefficients diagonaux sont $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Pour tout $p \in \mathbb{N}$:

$$A^p = \begin{pmatrix} \lambda_1^p & & \cdots & \\ 0 & \lambda_2^p & (*) & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n^p \end{pmatrix}, \text{ resp. } \begin{pmatrix} \lambda_1^p & 0 & \cdots & 0 \\ & \lambda_2^p & \ddots & \vdots \\ \vdots & (*) & \ddots & 0 \\ & \cdots & & \lambda_n^p \end{pmatrix}, \text{ resp. } \begin{pmatrix} \lambda_1^p & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^p & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n^p \end{pmatrix}$$

où $(*)$ sont des réels.

Remarque. Il est donc particulièrement facile de calculer les puissances d'une matrice diagonale : il suffit de prendre les puissances des termes diagonaux.

Mise en garde.

On peut avoir $A^k = 0_n$ pour un certain $k \in \mathbb{N}$ alors que $A \neq 0_n$, comme dans l'exemple suivant :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Définition.

Une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est dite *nilpotente* s'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^k = 0_n$.

On appelle alors *indice de nilpotence* le plus petit entier naturel non nul p tel que $A^p = 0_n$. C'est donc l'unique entier p tel que $A^{p-1} \neq 0_n$ et $A^p = 0_n$.

Exemple. La matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ est nilpotente d'ordre 2.

Exercice 5. Montrer que $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est nilpotente et déterminer son indice de nilpotence.

Pour aller plus loin.

Plus généralement, on montrera en TD que toute matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ triangulaire supérieure **stricte** ou triangulaire inférieure **stricte** est nilpotente d'indice de nilpotence inférieur à n.

Remarque. De même que pour les matrices diagonales, le calcul des puissances d'une matrice nilpotente A d'ordre de nilpotence p est aisé, puisque pour tout $k \geq p$, $A^k = 0_n$. Il suffit donc de calculer un nombre fini de puissances de A.

Théorème 17 (*Formule du binôme de Newton matriciel* (1642 - 1727))

Soient A et B deux matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ **qui commutent**, c'est-à-dire telles que $AB = BA$. Pour tout entier $p \in \mathbb{N}$:

$$(A+B)^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} A^k B^{p-k}.$$

Danger.
Cette formule est **fausse si A et B ne commutent pas**. Vous serez sanctionné si vous ne précisez pas que les matrices commutent avant d'utiliser la formule du binôme.

Méthode. Calcul de puissances par la formule du binôme de Newton.
*La formule du binôme de Newton, valable pour deux matrices **qui commutent**, permet dans certains cas de calculer les puissances d'une matrice.*

Exercice 6. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer A^p pour tout $p \in \mathbb{N}$.

Propriété 18

Soient A et B deux matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ **qui commutent**. Pour tout entier $p \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned} A^p - B^p &= (A-B)\left(\sum_{i=0}^{p-1} A^i B^{p-1-i}\right) \\ &= (A-B)\left(A^{p-1}B^0 + A^{p-2}B^1 + \cdots + A^1 B^{p-2} + A^0 B^{p-1}\right). \end{aligned}$$

3.4 Polynôme d'une matrice

Définition.

Soit $P : x \mapsto \sum_{k=0}^{d} a_k x^k$ une fonction polynomiale à cœfficients dans $\mathbb{K}$, et soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
On note $P(A)$ la matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ définie par :

$$P(A) = \sum_{k=0}^{d} a_k A^k = a_d A^d + \cdots + a_1 A + a_0 I_n.$$

Exemple. Si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et $P : x \mapsto x^2 + 3x - 10$, alors $P(A) = A^2 + 3A - 10I_n$.

Danger.
Attention de ne pas se tromper : le terme constant a_0 dans P devient $a_0 I_n$ dans $P(A)$.

Propriété 19

Soient $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et P, Q des fonctions polynomiales à coefficients dans A. Alors, les matrices $P(A)$ et $Q(A)$ commutent :

$$P(A) \times Q(A) = Q(A) \times P(A).$$

En particulier, A commute avec toutes ses puissances et avec tous les polynômes en A.

Définition.

Soient $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et P une fonction polynomiale.
On dit que P est un *polynôme annulateur de A* lorsque $P(A) = 0_n$.

Exercice 7. Déterminer un polynôme annulateur non nul de $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 8. Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{K})$.
Montrer que $P : x \mapsto x^2 - (a+d)x + (ad - bc)$ est un polynôme annulateur de A.

3.5 Trace d'une matrice carrée

Définition.

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice carrée.
On appelle *trace de* A, et on note $\mathrm{tr}(A)$, la somme de ses cœfficients diagonaux, c'est-à-dire :

$$\mathrm{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} [A]_{i,i} \in \mathbb{K}.$$

Exemples.

- $\mathrm{tr}\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}\right) = 1 + 5 + 9 = 15.$
- $\mathrm{tr}(0_n) = 0$ et $\mathrm{tr}(I_n) = n$.
- $\mathrm{tr}(\mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)) = \lambda_1 + \cdots + \lambda_n$.

Propriété 20

L'application $\mathrm{tr} : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ A & \longmapsto & \mathrm{tr}(A) \end{array} \right.$ est une forme linéaire, c'est-à-dire :

$$\mathrm{tr}(\lambda \cdot A + \mu \cdot B) = \lambda \mathrm{tr}(A) + \mu \mathrm{tr}(B)$$

pour tous $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$.

Propriété 21

Soient $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Alors :

- $\mathrm{tr}(A^\top) = \mathrm{tr}(A)$;
- $\mathrm{tr}(A \times B) = \mathrm{tr}(B \times A)$.

4 Matrices carrées inversibles

4.1 Définitions et exemples

Définition.

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. La matrice A est dite *inversible* s'il existe $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ telle que :

$$AB = BA = I_n.$$

On note $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices inversibles de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, appelé *groupe linéaire d'ordre n*.

Propriété 22

Si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible, alors il existe une unique matrice $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ telle que :

$$AB = BA = I_n.$$

On l'appelle l'*inverse de* A et on le note A^{-1}.

Exemples.

- I_n est inversible car $I_n \times I_n = I_n$, et $I_n^{-1} = I_n$.
- Les matrices d'opérations élémentaires sont inversibles, et pour tous $1 \leq i, j \leq n$ et $\alpha \in \mathbb{K}^*$, $\beta \in \mathbb{K}$:

$$D_i(\alpha)^{-1} = D_i(1/\alpha) \quad ; \quad P_{i,j}^{-1} = P_{i,j} \quad ; \quad T_{i,j}(\beta)^{-1} = T_{i,j}(-\beta).$$

Remarques.

- On ne peut considérer un inverse que pour une matrice carrée.
- Si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible, alors pour tous $B, C \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$:

$$AC = AD \Leftrightarrow A^{-1}(AC) = A^{-1}(AD) \Leftrightarrow \underbrace{(A^{-1}A)}_{=I_n} C = \underbrace{(A^{-1}A)}_{=I_n} D \Leftrightarrow C = D.$$

Et de même : $\quad CA = DA \Leftrightarrow C = D.$

Danger.
Cette propriété devient fausse si on ne suppose plus A inversible. Par exemple :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{mais} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 9. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que A n'est pas inversible dans les cas suivants :

- A possédant une ligne ou une colonne nulle ;
- A est nilpotente.

Propriété 23 (Inversibilité des matrices diagonales)

Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ des scalaires.
Alors $\operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ est inversible si, et seulement si, $\lambda_i \neq 0$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$.
Lorsque c'est le cas, $\operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)^{-1} = \operatorname{diag}(\lambda_1^{-1}, \ldots, \lambda_n^{-1})$.

Propriété 24

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et soit P un polynôme annulateur de A.
Si $P(0) \neq 0$, alors A n'est pas inversible. De plus, A^{-1} est un polynôme en A.

Exercice 10. Déterminer l'inverse, s'il existe, de $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Propriété 25

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{K})$. Alors A est inversible si, et seulement si, $ad - bc \neq 0$. Et lorsque c'est le cas :

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Notation.
Le scalaire $ad - bc$ s'appelle le *déterminant de* A et se note $\det(A)$.

4.2 Opérations sur les matrices inversibles

Propriété 26

Soient $A, B \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ deux matrices inversibles. Alors :

(1) A^{-1} est inversible, et $(A^{-1})^{-1} = A$;

(2) pour tout $\lambda \in \mathbb{K}^*$, $\lambda \cdot A$ est inversible, d'inverse $\dfrac{1}{\lambda} \cdot A$;

(3) AB est inversible, et $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$;

(4) pour tout $k \in \mathbb{N}$, A^k est inversible, et $(A^k)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^k$;

(5) $A^\top$ est inversible, et $\left(A^\top\right)^{-1} = (A^{-1})^\top$.

Remarque. L'ensemble $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ est donc stable pour le produit matriciel. Attention cependant : l'inverse d'un produit est le produit des inverses, mais on n'oubliera pas de changer l'ordre.

Mise en garde.
L'ensemble $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ n'est cependant pas stable par somme. On peut facilement s'en convaincre avec l'égalité $I_n + (-I_n) = 0_n$.

4.3 Inversibilité et opérations élémentaires

Propriété 27

(1) La relation binaire $\overset{\mathscr{L}}{\sim}$ est une relation d'équivalence sur l'ensemble $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ des matrices carrées de taille n.

(2) Si $A \overset{\mathscr{L}}{\sim} B$, alors A est inversible si, et seulement si, B l'est.

Théorème 28 (Première caractérisation de l'inversibilité)

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Il y a équivalence entre :

(1) A est inversible ; (2) $A \overset{\mathscr{L}}{\sim} I_n$; (3) $A \overset{\mathscr{C}}{\sim} I_n$.

Corollaire 29

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice inversible. Alors :

(1) A s'écrit comme un produit d'un nombre fini de matrices de transvections et de dilations ;

(2) son inverse A^{-1} s'obtient en effectuant les mêmes opérations élémentaires sur les lignes de I_n que celles qui permettent de ramener A à l'identité.

Méthode. Inversibilité et calcul pratique de l'inverse, version « matricielle ».

Pour déterminer si une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible, et le cas échéant obtenir A^{-1}, on procèdera comme suit :

(i) on écrit la matrice I_n à droite de A sous la forme $(A \mid I_n)$;

(ii) à l'aide d'opérations élémentaires ***sur les lignes*** *en suivant l'algorithme du pivot, on échelonne A par lignes, tout en réalisant les mêmes opérations sur la matrice de droite ;*

(iii) si le nombre de pivots de la matrice échelonnée est n, alors A est inversible, sinon A ne l'est pas ;

(iv) dans le cas où A est inversible, on effectue la « remontée » par opérations sur les lignes afin de transformer A en I_n. La matrice de droite est alors A^{-1}.

Exercice 11. Déterminer si les matrices suivantes sont inversibles, et le cas échéant calculer l'inverse :

- $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$;
- $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ -3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

Propriété 30 (CNS d'inversibilité d'une matrice triangulaire)

Soit $T \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice triangulaire supérieure (resp. inférieure).
Alors T est inversible si, et seulement si, ses coefficients diagonaux sont tous non-nuls.
Dans ce cas, T^{-1} est encore triangulaire supérieure (resp. inférieure), et ses coefficients diagonaux sont les inverses de ceux de T.

Exemple. La matrice $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ est inversible car triangulaire avec des coefficients diagonaux tous non nuls.

4.4 Inversibilité et systèmes linéaires

Théorème 31 (Deuxième caractérisation de l'inversibilité)

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Il y a équivalence entre :

(1) A est inversible ;

(4) pour toute matrice $B \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, le système $AX = B$ admet une unique solution[a] ;

(5) il existe une matrice $B \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ telle que le système $AX = B$ admet une unique solution ;

(6) le système $AX = 0$ admet pour unique solution $X = 0_{n,1}$.

[a] Rappelons qu'un tel système est alors dit *de Cramer*.

Méthode. Inversibilité et calcul pratique de l'inverse, version « système linéaire ».

Pour déterminer si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible et obtenir le cas échéant A^{-1}, on peut aussi procéder comme suit :

(i) on échelonne par l'algorithme du pivot le système $(\mathscr{S})$: $AX = Y$ d'inconnue $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et de second membre $Y \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$;

(ii) si $(\mathscr{S})$ est de Cramer (nombre de pivots égal à n), A est inversible, sinon A ne l'est pas ;

(iii) si A est inversible, on effectue la remontée de $(\mathscr{S})$. Son unique solution X s'exprime alors en fonction des composantes de Y, ce qui permet d'écrire :

$$X = BY \qquad \text{avec} \qquad B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}).$$

Par identification, on obtient $A^{-1} = B$.

Exercice 12. Déterminer si les matrices suivantes sont inversibles, et calculer leur inverse le cas échéant :

- $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$;
- $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & -8 \end{pmatrix}$.

Corollaire 32

Soient $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Si $AB = I_n$, alors A et B sont inversibles, et $A = B^{-1}$.

Méthode. Inversibilité à l'aide d'un inverse à gauche ou à droite.

Pour montrer qu'une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible, il suffit de trouver une matrice $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $A \times B = I_n$ (resp. $B \times A = I_n$). Il est donc inutile de vérifier que $B \times A = I_n$ (resp. $A \times B = I_n$), c'est automatiquement vérifié.