Chapitre 18

Dérivabilité

Compétences attendues.

- ✓ Étudier la dérivabilité d'une fonction en un point.
- ✓ Calculer la dérivée (et la dérivée n-ème) de fonctions déduites des fonctions usuelles.
- ✓ Utiliser la dérivation pour obtenir des variations ou rechercher des extremums.
- ✓ Maitriser le théorème de Rolle et l'égalité des accroissements finis.
- ✓ Utiliser l'inégalité des accroissements finis, notamment pour l'étude d'une suite récurrente d'ordre 1.

Anthony Mansuy - Professeur en MP2I au Lycée Roosevelt (Reims)
Page personnelle : anthony-mansuy.fr/
E-mail : mansuy.anthony@hotmail.fr

1 Nombre dérivé, fonction dérivée

Dans tout le chapitre, I désignera un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point, et $\mathring{I} = I \setminus \{\text{bornes de } I\}$ l'intérieur de I.

1.1 Définition de la dérivabilité

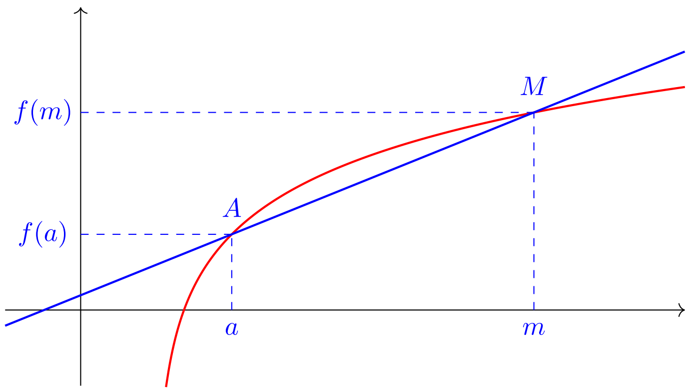
Définition.

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction et $a \in I$. On dit que f est *dérivable en a* si son *taux d'accroissement en a* :

$$\tau_a(f) : \left\{ \begin{array}{ccc} I \setminus \{a\} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} \end{array} \right.$$

admet une limite finie en a. Cette limite, lorsqu'elle existe, est la *dérivée de f en a* et est noté $f'(a)$.

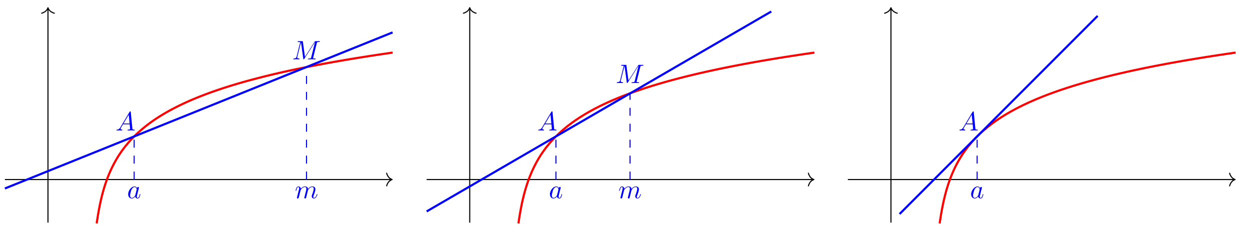
Interprétation géométrique. Fixons $a \in I$ et considérons $m \in I$, $m \neq a$. On note $A(a, f(a))$ et $M(m, f(m))$ un point distinct de A appartenant à la courbe représentative de f.



Rappelons que la droite (ou corde) (AM) a pour équation cartésienne :

$$y = \frac{f(m) - f(a)}{m - a}(x - a) + f(a).$$

Par définition, f est dérivable en a si, et seulement si, le coefficient directeur de la droite (AM) admet une limite finie quand x tend vers a.



Dans ce cas, la position limite de la droite (AM) lorsque M tend vers A est la *tangente à $\mathscr{C}_f$ au point A*. Son coefficient directeur est donc $f'(a)$, et son équation cartésienne est :

$$\boxed{y = f'(a)(x - a) + f(a).}$$

Remarque. Si $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} = \pm\infty$, f n'est pas dérivable en a. On dit dans ce cas que $\mathscr{C}_f$ admet une *tangente verticale au point A* d'équation $x = a$.

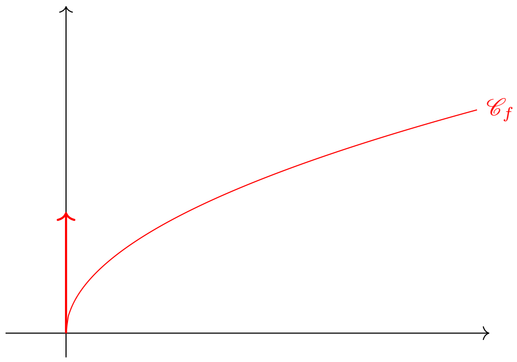
Exemple. Soit $f : x \mapsto \sqrt{x}$. Pour tout $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $x \in \mathbb{R}_+ \setminus \{a\}$:

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{(\sqrt{x}-\sqrt{a})(\sqrt{x}+\sqrt{a})} = \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{a}} \underset{x\to a}{\longrightarrow} \frac{1}{2\sqrt{a}}.$$

La fonction racine carrée est donc dérivable en a, de dérivée $\frac{1}{2\sqrt{a}}$. Elle n'est cependant pas dérivable en 0, puisque pour tout $x \neq 0$:

$$\frac{\sqrt{x}-0}{x} = \frac{1}{\sqrt{x}} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} +\infty.$$

La courbe de f admet au point d'abscisse 0 une tangente verticale d'équation $x = 0$.



Courbe représentative de la fonction racine carrée.

Exercice 1. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $a \in \mathbb{R}$. Montrer que la fonction $f : x \mapsto x^n$ est dérivable en a et que $f'(a) = na^{n-1}$.

Définition.

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction et $a \in I$.
On dit que f est *dérivable à droite* (resp. *à gauche*) en a si son taux d'accroissement en a :

$$\tau_a(f) : \left\{ \begin{array}{ccc} I \setminus \{a\} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} \end{array} \right.$$

admet une limite finie à droite (resp. à gauche) en a. Si elles existent, on note alors ces limites $f'_d(a)$ et $f'_g(a)$, appelées *dérivées à droite* et *à gauche de la fonction f en a*.

Remarque. On définit les *demi-tangentes à droite et à gauche* à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point $A(a, f(a))$ par les demi-droites d'équation respective :

$$x \geq a \quad \text{et} \quad y = f'_d(a)(x-a) + f(a),$$
$$x \leq a \quad \text{et} \quad y = f'_g(a)(x-a) + f(a).$$

Propriété 1

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction et $a \in I$ qui n'est pas une borne de I. Alors :

$$f \text{ est dérivable en } a \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} f \text{ est dérivable à gauche en } a, \\ f \text{ est dérivable à droite en } a, \\ f'_g(a) = f'_d(a). \end{array} \right.$$

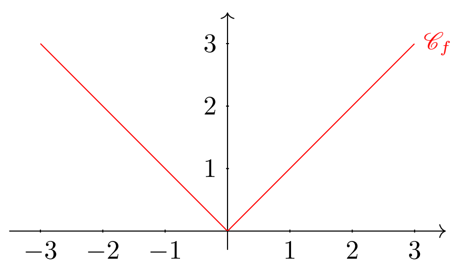
Dans ces conditions, $f'(a) = f'_g(a) = f'_d(a)$.

Remarque. Si $a \in I$ est la borne inférieure (resp. supérieure) de I, alors f est dérivable en a si, et seulement si, f est dérivable à droite (resp. à gauche) en a.

Exemple. La fonction valeur absolue $f : x \mapsto |x|$ est continue sur $\mathbb{R}$. Étudions sa dérivabilité en 0. Pour tout $x \neq 0$:

$$\frac{|x|-|0|}{x-0} = \frac{|x|}{x} \to \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \text{si } x \to 0^+ \\ -1 & \text{si } x \to 0^- \end{array} \right. .$$

La fonction valeur absolue est donc dérivable à gauche et à droite en 0, de dérivées à gauche et à droite égales à -1 et 1. Elle n'est par contre pas dérivable en 0.



Courbe représentative de la fonction valeur absolue.

Définition.

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction et $a \in I$.
On dit que f admet un *développement limité à l'ordre 1 en a* s'il existe $(a_0, a_1) \in \mathbb{R}^2$ et une fonction $\varepsilon : I \to \mathbb{R}$ tels que :

$$\forall x \in I,\ f(x) = a_0 + (x-a)a_1 + (x-a)\varepsilon(x) \quad \text{avec} \quad \lim_{x \to a} \varepsilon(x) = 0.$$

Propriété 2

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction et $a \in I$.
Alors f est dérivable en a si, et seulement si, f admet un développement limité à l'ordre 1 en a, et ce développement limité est alors nécessairement :

$$\forall x \in I,\ f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + (x-a)\varepsilon(x).$$

Corollaire 3

Si f est dérivable en a, **alors** f est continue en a.

Mise en garde.

La réciproque est fausse : une fonction peut être continue en un point et non dérivable en ce point. Par exemple, la fonction valeur absolue est continue en 0 et non dérivable en 0.

Définition.

On dit que $f : I \to \mathbb{R}$ est *dérivable sur I* si elle est dérivable en chaque point de I. On définit alors la *fonction dérivée* de f sur I, notée f', par :

$$f' : \left\{ \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f'(x) \end{array} \right. .$$

On note alors $\mathscr{D}(I, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions dérivables sur I à valeurs dans $\mathbb{R}$.

1.2 Opérations sur les fonctions dérivables

Propriété 4

Soient f et $g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables en $a \in I$.

(1) Pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, $(\lambda f + \mu g)$ est dérivable en a et

$$(\lambda f + \mu g)'(a) = \lambda f'(a) + \mu g'(a).$$

(2) fg est dérivable en a et

$$(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a).$$

(3) Si $g(a) \neq 0$, alors $\dfrac{f}{g}$ est dérivable en a et

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g(a)^2}.$$

Remarque. Puisque les fonctions $x \mapsto x^n$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, par combinaison linéaire, toute fonction polynomiale est dérivable sur $\mathbb{R}$. Comme quotient de fonctions dérivables, une fonction rationnelle est dérivable sur tout intervalle où elle est définie.

Propriété 5

Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : J \to \mathbb{R}$ telles que $f(I) \subset J$.
Si f est dérivable en $a \in I$ et si g est dérivable en $b = f(a)$, alors $g \circ f$ est dérivable en a et

$$(g \circ f)'(a) = f'(a)g'(f(a)).$$

Remarque. Cette propriété permet d'obtenir la dérivée de certaines composées usuelles :

$$(\ln(f))'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}, \quad (\exp(f))'(x) = f'(x)\exp(f(x)), \quad (f^\alpha)'(x) = \alpha f'(x) f^{\alpha-1}(x), \quad (\sqrt{f})'(x) = \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}},$$

$$(\cos(f))'(x) = -f'(x)\sin(f(x)), \quad (\sin(f))'(x) = f'(x)\cos(f(x)), \quad (\tan(f))'(x) = f'(x)(1 + \tan(f(x))^2).$$

Propriété 6 (Dérivabilité de la fonction réciproque)

Soient $a \in I$ et $f : I \to J$ une fonction continue, strictement monotone sur I et dérivable en a.
Alors f^{-1} est dérivable en $b = f(a)$ si, et seulement si, $f'(a) \neq 0$. Et dans ce cas :

$$\left(f^{-1}\right)'(b) = \frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(b)\right)}.$$

Interprétation géométrique. On peut retrouver la formule de la dérivée de l'application réciproque par un argument géométrique. En effet, la courbe de f^{-1} s'obtenant à partir de celle de f via une symétrie par rapport à la première bissectrice, il en est de même pour les tangentes : pour tout $(a, b) \in I \times J$ tel que $b = f(a)$, à la tangente à $\mathscr{C}_f$ en $(a, f(a))$ correspond par symétrie la tangente à $\mathscr{C}_{f^{-1}}$ au point $(b, f^{-1}(b))$.

Supposons $f'(a) \neq 0$. Le coefficient directeur de la tangente à $\mathscr{C}_f$ en $(a, f(a))$ est $f'(a)$, celui de la droite obtenue à partir de cette tangente par symétrie par rapport à la première bissectrice est $\dfrac{1}{f'(a)}$. Or nous venons de le noter, cette droite n'est autre que la tangente à $\mathscr{C}_{f^{-1}}$ en $(b, f^{-1}(b))$, de coefficient directeur $(f^{-1})'(b)$. Ainsi :

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))}.$$

Dans le cas où $f'(a) = 0$, $\mathscr{C}_f$ possède une tangente horizontale en $(a, f(a))$. Par symétrie, $\mathscr{C}_{f^{-1}}$ possède une tangente verticale en $(b, f^{-1}(b))$.

2 Dérivées n-èmes, fonctions de classe $\mathscr{C}^n$

2.1 Définitions

Définition.

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction. On définit récursivement les dérivées successives de f par :

- $f^{(0)} = f$;
- pour tout $n \in \mathbb{N}$, si $f^{(n)}$ est dérivable sur I, $f^{(n+1)} = (f^{(n)})'$.

Si pour $n \in \mathbb{N}$, la fonction $f^{(n)}$ existe, on dit que f est *n fois dérivable sur I*, et on appelle $f^{(n)}$ *la dérivée n-ième de f sur I*.

Interprétation cinématique. On décrit le mouvement d'un mobile qui se déplace sur un axe par une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$ qui associe à tout t l'abscisse du mobile à l'instant t. Rappelons que :

- la vitesse à l'instant t du mobile est donnée par $f'(t)$.
- l'accélération à l'instant t du mobile est donnée par $f''(t)$.

Définition.

Soient $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle I et $n \in \mathbb{N}$. On dit que :

- f est *de classe* $\mathscr{C}^n$ *sur* I si f est n fois dérivable sur I, et $f^{(n)}$ est continue sur I.
- f est *de classe* $\mathscr{C}^\infty$ *sur* I si f est $\mathscr{C}^k$ sur I pour tout $k \in \mathbb{N}$.

On note $\mathscr{C}^n(I,\mathbb{R})$ (resp. $\mathscr{C}^\infty(I,\mathbb{R})$) l'ensemble des fonctions de I dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^n$ (resp. $\mathscr{C}^\infty$).

Remarque. Si f est n fois dérivable sur I, avec $n \geq 1$, alors $f^{(n-1)}$ est dérivable, donc continue sur I. Par conséquent, f est de classe $\mathscr{C}^n$ sur I.
En notant $\mathscr{D}^n(I,\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions n fois dérivables sur I, on dispose donc de la suite d'inclusions suivantes :

$$\mathscr{C}^\infty(I,\mathbb{R}) \subset \cdots \subset \mathscr{D}^{n+1}(I,\mathbb{R}) \subset \mathscr{C}^n(I,\mathbb{R}) \subset \mathscr{D}^n(I,\mathbb{R}) \subset \cdots \subset \mathscr{C}^1(I,\mathbb{R}) \subset \mathscr{D}^1(I,\mathbb{R}) \subset \mathscr{C}^0(I,\mathbb{R}).$$

De plus, toutes ces inclusions sont strictes comme le montre l'exercice suivant.

Exercice 2.

1. Montrer que la fonction
$$f : x \in \mathbb{R} \mapsto \begin{cases} x^2 \cos\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$
est dérivable sur $\mathbb{R}$. Est-elle de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
2. En déduire l'existence, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, d'une fonction n fois dérivable sur $\mathbb{R}$ qui n'est pas de classe $\mathscr{C}^n$ sur $\mathbb{R}$.
3. De même, montrer l'existence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, d'une fonction de classe $\mathscr{C}^n$ sur $\mathbb{R}$ qui n'est pas $n+1$ fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

Mise en garde.

On ne confondra donc pas « dérivable » et « de classe $\mathscr{C}^1$ », « deux fois dérivable » et « de classe $\mathscr{C}^2$ », etc.

2.2 Opérations sur les fonctions $\mathscr{C}^k$

Propriété 7

Soit n un entier naturel.

(1) Si $(f,g) \in (\mathscr{C}^n(I,\mathbb{R}))^2$ et $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$, alors $\lambda f + \mu g \in \mathscr{C}^n(I,\mathbb{R})$ et
$$(\lambda f + \mu g)^{(n)} = \lambda f^{(n)} + \mu g^{(n)}.$$

(2) Si $(f,g) \in (\mathscr{C}^n(I,\mathbb{R}))^2$, alors $fg \in \mathscr{C}^n(I,\mathbb{R})$ et
$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)} \qquad \textit{(Formule de Leibniz).}$$

(3) Si $(f,g) \in (\mathscr{C}^n(I,\mathbb{R}))^2$ et si g ne s'annule pas sur I, alors $\dfrac{f}{g} \in \mathscr{C}^n(I,\mathbb{R})$.

(4) Si $f \in \mathscr{C}^n(I,\mathbb{R})$ et $g \in \mathscr{C}^n(J,\mathbb{R})$ avec $f(I) \subset J$, alors $(g \circ f) \in \mathscr{C}^n(I,\mathbb{R})$.

(5) Si $f : I \to J$ bijective, de classe $\mathscr{C}^n$ sur I et telle que f' ne s'annule pas sur I, alors f^{-1} est de classe $\mathscr{C}^n$ sur J.

Remarque. Tous ces énoncés restent valables en changeant « de classe $\mathscr{C}^n$ » en « n fois dérivable » ou en « de classe $\mathscr{C}^\infty$ ».

3 Propriétés des fonctions dérivables

3.1 Extremum local

Définition.

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction. On dit que :

- f admet un *maximum global* (resp. *minimum global*) en a si :

$$\forall x \in I, \quad f(x) \leq f(a) \qquad (\text{resp. } f(x) \geq f(a)).$$

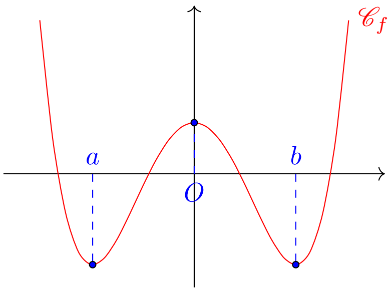
- f admet un *maximum local* (resp. *minimum local*) en a s'il existe un réel $\eta > 0$ tel que la fonction $f_{|I\cap[a-\eta,a+\eta]}$ admette un maximum (resp. minimum) en a, c'est-à-dire :

$$\forall x \in I \cap [a-\eta, a+\eta], \quad f(x) \leq f(a) \qquad (\text{resp. } f(x) \geq f(a)).$$

- f admet un *extremum local* (resp. *global*) *en* a si f admet un maximum ou un minimum local (resp. global) en a.

Exemple. La fonction f représentée ci-contre admet trois extrema :

- un minimum local (et même global) atteint aux points d'abscisse a et b ;
- un maximum local (mais non global) au point d'abscisse 0.



Définition.

Soient $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable et $a \in I$. On dit que a est un *point critique* de f si $f'(a) = 0$.

Propriété 8 (Condition nécessaire d'extrémum)

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle **ouvert** I.

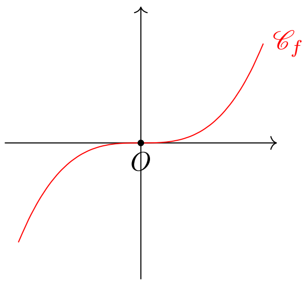
Si f admet un extremum local en un point $a \in I$, **alors** a est un point critique de f.

Mise en garde.

- **La réciproque est fausse !**

  Par exemple, la fonction $f : x \in \mathbb{R} \mapsto x^3$ satisfait $f'(0) = 0$, mais f n'admet pas d'extremum local en 0.

- L'hypothèse I **ouvert** est essentielle : par exemple, la fonction $f : x \in [0,1] \mapsto x$ est dérivable sur $[0,1]$, admet un minimum en 0 et un maximum en 1, mais $f'(0) = f'(1) = 1 \neq 0$.



Courbe représentative de $f : x \mapsto x^3$.

Méthode. Recherche des extrema d'une fonction.

Pour déterminer les extrema d'une fonction f, on pourra procéder comme suit :

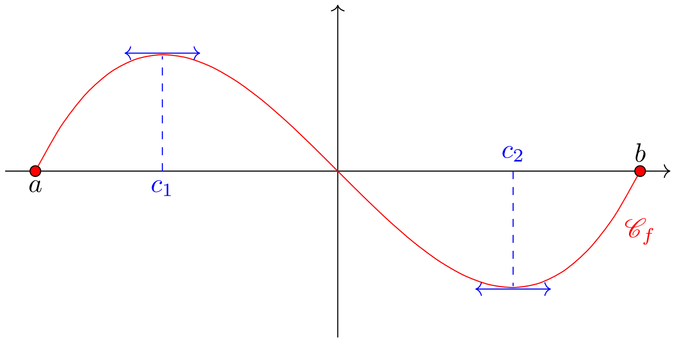
- *On étudie les extrema en les points intérieurs à I : on résout l'équation $f'(x) = 0$, puis on vérifie si les points obtenus correspondent ou non à des extrema locaux (avec le tableau de variations de f par exemple).*
- *On étudie si les bornes de I (si elles appartiennent à I) correspondent ou non à des extrema locaux de f.*

3.2 Théorème de Rolle

Théorème 9 (*de Rolle* (1652 - 1719))

Soient a et b deux réels avec $a < b$ et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ **continue** sur $[a, b]$, **dérivable** sur $]a, b[$ et telle que $f(a) = f(b)$. Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Remarque. Un élément $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$ n'est pas unique en général, comme dans l'exemple suivant :



Exercice 3. Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. On suppose que f s'annule au moins $n + 1$ fois sur $[a, b]$, et que f est n fois dérivable sur $[a, b]$.

1. Montrer que l'équation $f'(x) = 0$ admet au moins n solutions sur $]a, b[$.
2. Montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que $f^{(n)}(c) = 0$.

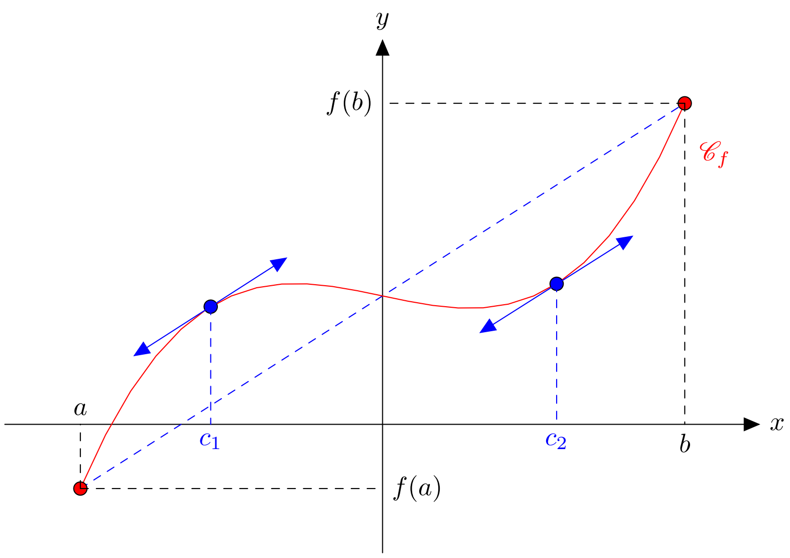
3.3 Égalité des accroissements finis

Théorème 10 (*Égalité des accroissements finis*)

Soient a et b deux réels avec $a < b$ et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, **continue** sur $[a, b]$ et **dérivable** sur $]a, b[$. Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que :

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a).$$

Interprétation géométrique. L'égalité des accroissements finis se récrit $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$. Elle signifie qu'il existe (au moins) une tangente au graphe de f sur $]a, b[$ qui soit parallèle à la corde (AB), où $A(a, f(a))$ et $B(b, f(b))$.



Interprétation cinématique. Considérons toujours le mouvement d'un mobile se déplaçant sur un axe et supposons que son abscisse $f(t)$ soit une fonction dérivable par rapport au temps t. Ce théorème nous dit qu'il existe un instant c où la vitesse instantanée $f'(c)$ est égale à la vitesse moyenne sur le trajet $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

3.4 Dérivabilité et monotonie

Propriété 11

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur I, dérivable sur $\overset{\circ}{I}$.
Alors f est constante sur I si, et seulement si, $f'(x) = 0$ pour tout $x \in I$.

Propriété 12

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur I, dérivable sur $\overset{\circ}{I}$.

(1) f est croissante (resp. décroissante) sur I si, et seulement si, f' est positive (resp. négative) sur I.

(2) f est strictement croissante sur I si, et seulement si, f' est positive sur I et n'est identiquement nulle sur aucun intervalle $[a, b]$ avec $a < b$.

En particulier, si f' est strictement positive sur I, alors f est strictement croissante sur I.

3.5 Théorème de la limite de la dérivée

Théorème 13 (*de la limite de la dérivée*)

Soient $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle I, et $a \in I$.
Si f est **continue** sur I, **dérivable** sur les intervalles formant $I \setminus \{a\}$ et si

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} f'(x) = \ell \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\},$$

alors :

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \ell.$$

En particulier :

- si $\ell \in \mathbb{R}$, alors f est dérivable en a avec $f'(a) = \ell$, et f' est continue en a ;
- si $\ell = \pm\infty$, alors la courbe de f admet une tangente verticale en a.

Remarque. Sans le théorème de la limite de la dérivée, il aurait fallu commencer par prouver que f est dérivable en a (soit un premier calcul de limite), puis étudier la continuité de f' en a (second calcul de limite). Le théorème de la limite de la dérivée nous permet de conclure avec le second calcul seulement.

Corollaire 14 (*Théorème de prolongement $\mathscr{C}^k$*)

Soit $k \in \mathbb{N}^*$ et soit f est une fonction de classe $\mathscr{C}^k$ sur les intervalles constituant $I \setminus \{a\}$.
Si $f^{(i)}$ possède une limite finie quand x tend vers a pour tout $i \in [\![0, k]\!]$, alors f peut être prolongée en une fonction de classe $\mathscr{C}^k$ sur I.

Remarque. On déduit de même un « théorème de prolongement $\mathscr{C}^\infty$ » si les hypothèses de la proposition ci-dessus sont satisfaites pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 4. Soit $f : \left\{ \begin{array}{ccc} [-1,1] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \arcsin(1-x^4) \end{array} \right.$. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[-1,1]$.

3.6 Inégalité des accroissements finis et applications

Théorème 15 (*Inégalité des accroissements finis*)

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ **continue** sur $[a,b]$ et **dérivable** sur $]a,b[$.

(1) S'il existe $(m,M) \in \mathbb{R}^2$ tel que pour tout $x \in]a,b[$, $m \leq f'(x) \leq M$, alors

$$m(b-a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b-a).$$

(2) S'il existe $M \geq 0$ tel que pour tout $x \in]a,b[$, $|f'(x)| \leq M$, alors

$$|f(b) - f(a)| \leq M|b-a|.$$

Définition.

Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est dite *lipschitzienne sur I* s'il existe un nombre réel $k \geq 0$ tel que :

$$\forall (x,x') \in I^2, \quad |f(x) - f(x')| \leq k|x - x'|.$$

On dira plus particulièrement dans ce cas que f est *k-lipschitzienne* sur I.
On dira que f est *contractante* sur I si elle y est k-lipschitzienne avec $0 \leq k < 1$.

Propriété 16

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur I.
Si $|f'|$ est majorée par une constante M sur I, alors f est M-lipschitzienne sur I.

Exemple. Les fonctions sinus et cosinus sont 1-lipschitziennes sur $\mathbb{R}$. En effet pour le sinus par exemple, $|\sin'| = |\cos| \leq 1$. Par la proposition précédente, pour tous $x, y \in \mathbb{R}$:

$$|\sin(x) - \sin(y)| \leq |x - y|.$$

En particulier pour $y = 0$, on retrouve l'inégalité classique $|\sin(x)| \leq |x|$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Propriété 17

Soit $f : I \to I$ une fonction contractante.
Si f admet un point fixe ℓ, alors ℓ est unique. De plus, pour toute suite (u_n) définie par $u_0 \in I$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$, (u_n) converge vers ℓ.

Exercice 5. Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \exp(-u_n - 1)$.

1. Montrer que (u_n) converge vers une limite finie ℓ.
2. Déterminer un entier naturel N à partir duquel u_n est à 10^{-5} près de ℓ.

4 Extension aux fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$

Définition.

Soit $f : I \to \mathbb{C}$ une fonction de la variable réelle à valeurs complexes.

- On dit que f est *dérivable* en $a \in I$ si le *taux d'accroissement en* a :

$$\tau_a(f) : \left\{ \begin{array}{ccc} I \setminus \{a\} & \to & \mathbb{C} \\ x & \mapsto & \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} \end{array} \right.$$

  admet une limite finie en a. On appelle alors *dérivée* de f en a et on note $f'(a)$ cette limite.
- On dit que f est *dérivable* sur I si f est dérivable en chaque point de I.

Notation.

Soit $f : I \to \mathbb{C}$. On note $\mathrm{Re}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ les fonctions de I dans $\mathbb{R}$ définies par :

$$\forall x \in I, \quad \mathrm{Re}(f)(x) = \mathrm{Re}(f(x)) \quad \text{et} \quad \mathrm{Im}(f)(x) = \mathrm{Im}(f(x)).$$

Propriété 18

La fonction $f : I \to \mathbb{C}$ est dérivable en $a \in I$ si, et seulement si, $\mathrm{Re}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont dérivables en a, et alors :

$$f'(a) = \mathrm{Re}(f)'(a) + i\,\mathrm{Im}(f)'(a).$$

Remarque. On peut définir comme dans le cas réel la notion de fonction à valeurs complexes de classe $\mathscr{C}^k$. On peut alors montrer plus généralement que $f : I \to \mathbb{C}$ est de classe $\mathscr{C}^k$ sur I si, et seulement si, $\mathrm{Re}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont de classe $\mathscr{C}^k$ sur I, et dans ce cas :

$$f^{(k)} = (\mathrm{Re}(f))^{(k)} + i\,(\mathrm{Im}(f))^{(k)}.$$

Mise en garde.

Les théorèmes de Rolle et des accroissement finis sont faux pour les fonctions à valeurs complexes. Par exemple, la fonction $f : t \mapsto e^{it}$ est continue sur $[0, 2\pi]$, dérivable sur $]0, 2\pi[$, et $f(2\pi) = f(0) = 1$. Cependant pour tout $t \in]0, 2\pi[$, $f'(t) = ie^{it}$ est de module 1, donc non nul.

On conserve cependant l'inégalité des accroissements finis pour les fonctions à valeurs complexes.

Propriété 19 (*Inégalité des accroissements finis*)

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ une fonction **continue** sur $[a, b]$, **dérivable** sur $]a, b[$. On suppose que $|f'|$ est majorée par M sur $]a, b[$. Alors :

$$|f(b) - f(a)| \leq M|b - a|.$$

Corollaire 20

Une fonction $f : I \to \mathbb{C}$ est constante si et seulement si elle est dérivable et de dérivée nulle.

Remarque. Résumons par un tableau ce qui reste valable ou non pour les fonctions à valeurs complexes.

Ce qui reste valable dans $\mathbb{C}$	**Ce qui n'est plus valable dans $\mathbb{C}$**
Développement limité à l'ordre 1	Théorème de dérivabilité de la fonction réciproque
Dérivable implique continu	Annulation aux extremums locaux
Opérations sur les dérivées	Théorème de Rolle
Dérivées d'ordre supérieur, fonctions $\mathscr{C}^k$	Théorème des accroissements finis
Opérations sur les fonctions $\mathscr{C}^k$	Lien monotonie/signe de la dérivée
Inégalité des accroissements finis	Théorème de prolongement $\mathscr{C}^1$
Dérivée bornée implique f lipschitzienne	
Dérivée nulle implique f constante	

Liens utiles.

Flâneries infinitésimales, Voyage au pays des maths, ARTE.