Chapitre 20

Analyse asymptotique

Compétences attendues.

✓ Montrer l'équivalence, la négligeabilité ou la domination de deux suites ou deux fonctions.

✓ Maitriser les opérations sur les équivalents, les petits o et les grands O.

✓ Connaître les croissances comparées et les équivalents usuels.

Anthony Mansuy - Professeur en MP2I au Lycée Roosevelt (Reims)

Page personnelle : `anthony-mansuy.fr/`

E-mail : `mansuy.anthony@hotmail.fr`

1 Relations de comparaison : cas des suites

Dans ce chapitre, nous donnons des outils performants pour décrire des concepts que vous avez déjà en tête depuis quelques temps : l'idée qu'une suite ou une fonction « l'emporte sur une autre », et donc impose sa limite. Par exemple, lorsque vous écriviez

$$\lim_{n\to+\infty} -2n^4+n^3+5n = \lim_{n\to+\infty}(-2n^4) = -\infty, \text{ ou encore } \lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x+1} = +\infty,$$

rien ne justifiait jusque-là ces égalités, même si elles semblent relever du bon sens. Afin de formaliser cette idée, nous introduisons les notions de suite ou fonction dominée, négligeable ou équivalente à une autre.

Dans cette section, les suites considérées sont à valeurs dans $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1.1 Relations de domination, de négligeabilité

Définitions et premiers exemples

Définition.

Soient (u_n) et (v_n) deux suites.

- On dit que (u_n) est *dominée par* (v_n) s'il existe un réel M tel que $|u_n|\leq M|v_n|$ à partir d'un certain rang, soit formellement :
$$\exists M\in\mathbb{R},\ \exists N\in\mathbb{N},\ \forall n\geq N,\ |u_n|\leq M|v_n|.$$
- On dit que (u_n) est *négligeable devant* (v_n) si pour tout $\varepsilon>0$, $|u_n|\leq\varepsilon|v_n|$ à partir d'un certain rang, soit formellement :
$$\forall\varepsilon>0,\ \exists N\in\mathbb{N},\ \forall n\geq N,\ |u_n|\leq\varepsilon|v_n|.$$

Notation.

- Notation de Bachmann : si (u_n) est dominée par (v_n), on note $u_n \underset{n\to+\infty}{=} O(v_n)$ (se lit « (u_n) est un grand o de (v_n) »). C'est cette notation qui est souvent utilisée dans l'analyse de la complexité d'un algorithme.
- Notation de Landau : si (u_n) est négligeable devant (v_n), on note $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n)$ (se lit « (u_n) est un petit o de (v_n) »).

Remarques.

- Si $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n)$, alors $u_n \underset{n\to+\infty}{=} O(v_n)$.
- La relation $u_n \underset{n\to+\infty}{=} O(0)$ (ou $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(0)$) signifie que (u_n) est nulle à partir d'un certain rang.
- La relation $u_n \underset{n\to+\infty}{=} O(1)$ signifie que (u_n) est bornée, $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(1)$ signifie que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Propriété 1

Soient (u_n) et (v_n) deux suites, avec (v_n) qui ne s'annule pas. Alors :

(1) $u_n = O(v_n)$ si, et seulement si, la suite $(\mu_n)=\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$ est bornée. Ainsi :

$$u_n = O(v_n) \quad\Leftrightarrow\quad \forall n\in\mathbb{N},\ u_n=\mu_n v_n \ \text{ avec } (\mu_n) \text{ bornée.}$$

(2) $u_n = o(v_n)$ si, et seulement si, la suite $(\varepsilon_n)=\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$ tend vers 0. Ainsi :

$$u_n = o(v_n) \quad\Leftrightarrow\quad \forall n\in\mathbb{N},\ u_n=\varepsilon_n v_n \ \text{ avec } \lim_{n\to+\infty}\varepsilon_n = 0.$$

Exemples.

- $\dfrac{\cos(n)}{n^2} = O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ car $(\cos(n))$ est bornée, $n^3\sin(n) = o\left(n^5\right)$ car $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^3\sin(n)}{n^5} = \dfrac{\sin(n)}{n^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
- Si $p < q$, alors $n^p = o(n^q)$ et $\dfrac{1}{n^q} = o\left(\dfrac{1}{n^p}\right)$.

Mise en garde.

Les égalités $u_n = o(v_n)$ et $u_n = O(v_n)$ ne sont pas des égalités au sens usuel. Par exemple, $n = o(n^3)$ et $n^2 = o(n^3)$, ce qui n'implique pas $n = n^2$. Ces égalités indiquent seulement que (u_n) appartient à l'ensemble des suites négligeables devant (v_n) ou dominées devant (v_n). Il est théoriquement plus correct, mais lourd, d'écrire $(u_n) \in o(v_n)$ ou $(u_n) \in O(v_n)$.

Remarque. En pratique, on pensera la négligeabilité et la domination des suites **en termes de quotients**. Dans cette perspective, nous supposerons pour les démonstrations des propriétés qui suivent que toutes les suites rencontrées ne s'annulent pas.

Opérations sur les o et O

Propriété 2 (Transitivité des relations o et O)

Soient (u_n), (v_n) et (w_n) trois suites.

(1) Si $u_n = O(v_n)$ et $v_n = O(w_n)$, alors $u_n = O(w_n)$.

(2) Si $u_n = o(v_n)$ et $v_n = o(w_n)$, alors $u_n = o(w_n)$.

Propriété 3 (Opérations sur les o et O)

Soient (u_n), (v_n), (w_n) et (t_n) quatre suites, et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$.

(1) Si $u_n = O(w_n)$ et $v_n = O(w_n)$, alors $\lambda u_n + \mu v_n = O(w_n)$.
Si $u_n = o(w_n)$ et $v_n = o(w_n)$, alors $\lambda u_n + \mu v_n = o(w_n)$.

(2) Si $u_n = O(w_n)$ et $v_n = O(t_n)$, alors $u_n v_n = O(w_n t_n)$.
Si $u_n = O(w_n)$ et $v_n = o(t_n)$, alors $u_n v_n = o(w_n t_n)$.

(3) Si $\lambda \neq 0$ et si $u_n = O(v_n)$, alors $u_n = O(\lambda v_n)$ et $\lambda u_n = O(v_n)$.
Si $\lambda \neq 0$ et si $u_n = o(v_n)$, alors $u_n = o(\lambda v_n)$ et $\lambda u_n = o(v_n)$.

(4) Si $u_n = O(v_n)$, alors $u_n w_n = O(v_n w_n)$.
Si $u_n = o(v_n)$, alors $u_n w_n = o(v_n w_n)$.

(5) Si $u_n = o(v_n)$ (resp. $u_n = O(v_n)$), alors pour toute extractrice φ, $u_{\varphi(n)} = o(v_{\varphi(n)})$ (resp. $u_{\varphi(n)} = O(v_{\varphi(n)})$).

Exercice 1. Réduire l'écriture des expressions asymptotiques suivantes :

(1) $o(2n) - 2o((-1)^n n)$; (2) $n\ln(n) + O(n+1) + o(n^2)$; (3) $2o(n)O(n) - nO(n)$.

Croissances comparées

Propriété 4 (Croissances comparées)

Soient $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}$ avec $\alpha,\beta>0$, et $q>1$. Alors :

$$q^{-n}=o\left(\frac{1}{n^\alpha}\right),\quad \frac{1}{n^\alpha}=o\left(\ln(n)^\beta\right),\quad \ln(n)^\beta=o\left(n^\alpha\right),\quad n^\alpha=o\left(q^n\right),\quad q^n=o(n!),\quad n!=o(n^n).$$

Remarque. La relation de négligeabilité étant transitive, on peut utiliser la notation $u_n \ll v_n$ au lieu de $u_n=o(v_n)$, et enchaîner les comparaisons. Le résultat précédent se récrit ainsi :

$$\frac{1}{n!}\ll q^{-n}\ll\frac{1}{n^\alpha}\ll\ln(n)^\beta\ll n^\alpha\ll q^n\ll n!\ll n^n.$$

Exercice 2. Classer par négligeabilité les termes généraux qui suivent :

(1) $n, n^2, \ln(n), e^n, n\ln(n), \dfrac{n^2}{\ln(n)}$;

(2) $\dfrac{1}{n}, \dfrac{1}{n^2}, \dfrac{1}{\ln(n)}, \dfrac{\ln(n)}{n}, \dfrac{\ln(n)}{n^2}, \dfrac{1}{n\ln(n)}$.

1.2 Relation d'équivalence

Définition et premières propriétés

Définition.

Soient (u_n) et (v_n) deux suites.
On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est *équivalente à* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, et on note $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ si $u_n-v_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n)$, soit formellement :

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists N\in\mathbb{N},\ \forall n\geq N,\ |u_n-v_n|\leq\varepsilon|v_n|.$$

Dans le cas où la suite (v_n) ne s'annule pas, il est équivalent d'exiger que $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{u_n}{v_n}=1$.

Exemples.

- $\sqrt{n}\underset{n\to+\infty}{\sim}\sqrt{n+1}$ car $\dfrac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}}=\sqrt{1+\dfrac{1}{n}}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}1$.
- $n+\sqrt{n}\sin(n)\underset{n\to+\infty}{\sim}n$ car $\dfrac{n+\sqrt{n}\sin(n)}{n}=1+\dfrac{\sin(n)}{\sqrt{n}}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}1$.

Remarque. Si $\ell\neq0$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\ell$ si, et seulement si, $u_n\underset{n\to+\infty}{\sim}\ell$. Un équivalent de $u_n-\ell$ permet d'évaluer la vitesse de convergence de (u_n) vers ℓ.

Mise en garde.

On se méfiera de l'équivalence $u_n\underset{n\to+\infty}{\sim}0$, quasiment toujours fausse, car elle signifie que la suite (u_n) est nulle à partir d'un certain rang. **On n'écrira donc jamais** $u_n\underset{n\to+\infty}{\sim}0$, et on retiendra qu'on n'est jamais équivalent à 0, sauf si on est complètement nul (à partir d'un certain rang).

Exercice 3. Chercher un équivalent de $u_n=\dfrac{1}{n}+n\ln(n)+\sqrt{n}+\dfrac{e^n}{n}$.

Propriété 5

Si (u_n) et (v_n) sont équivalentes, alors elles sont de même signe à partir d'un certain rang.

Opérations sur les équivalents

Propriété 6

La relation $\sim$ est une relation d'équivalence sur l'ensemble des suites. Ainsi, si (u_n), (v_n) et (w_n) sont trois suites :

- *Réflexivité :* $u_n \sim u_n$;
- *Symétrie :* $u_n \sim v_n \ \Rightarrow\ v_n \sim u_n$;
- *Transitivité :* si $u_n \sim v_n$ et $v_n \sim w_n$, alors $u_n \sim w_n$.

Propriété 7 (Opérations sur les équivalents)

Soient (u_n), (v_n), (w_n) et (t_n) quatre suites telles que $u_n \sim w_n$ et $v_n \sim t_n$. Alors :

(1) $u_n v_n \sim w_n t_n$;

(2) si (v_n) et (t_n) ne s'annulent pas, $\dfrac{u_n}{v_n} \sim \dfrac{w_n}{t_n}$;

(3) pour tout $k \in \mathbb{N}$ **fixé**, $u_n^k \sim w_n^k$;

(4) si $u_n > 0$ à partir d'un certain rang, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ **fixé**, $u_n^\alpha \sim w_n^\alpha$.

(5) pour toute extractrice φ, $u_{\varphi(n)} \sim w_{\varphi(n)}$.

Danger.

Ce sont les seules opérations autorisées pour les équivalents. Ainsi :

- **on ne simplifie pas les constantes dans les équivalents** : par exemple $\dfrac{2n+1}{3n^3+n} \sim \dfrac{2}{3n}$, mais $\dfrac{2n+1}{3n^3+n} \nsim \dfrac{1}{n}$.
- **on ne somme pas et on ne soustrait pas les équivalents** : par exemple, $n+1 \sim n+2$ et $-n \sim -n$, mais $1 \nsim 2$.
- **on ne compose pas les équivalents** par une fonction : par exemple, $n+1 \sim n$, mais $e^{n+1} \nsim e^n$ puisque $\dfrac{e^{n+1}}{e^n} = e \nrightarrow 1$.
- lors d'une mise en puissance d'un équivalent, l'exposant doit être **constant** : par exemple, $1+\dfrac{1}{n} \sim 1$, mais $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n \nsim 1$ (car $\lim \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n = e$ et donc $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n \sim e$).

Exemple. Si $P : x \mapsto a_p x^p + \cdots + a_1 x + a_0$ et $Q : x \mapsto b_q x^q + \cdots + b_1 x + b_0$ avec $a_p, b_q \neq 0$, alors :

$$P(n) = a_p n^p + o(n^p) \sim a_p n^p \quad \text{et} \quad \frac{P(n)}{Q(n)} \sim \frac{a_p n^p}{b_q n^q} = \frac{a_p}{b_q} n^{p-q}.$$

Propriété 8

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites telles que $u_n \sim v_n$.
La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite (finie ou infinie) si, et seulement si, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite. Et alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.

Exercice 4. Déterminer un équivalent de la suite de terme général $u_n = \sqrt[3]{n^3+2n^2+1} - \sqrt[3]{n^2-n+1}$.

Formule de Stirling

Propriété 9 (*Formule de Stirling*)

$$n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}.$$

Exercice 5. Déterminer un équivalent de $u_n = \binom{2n}{n}$.

2 Relations de comparaison : cas des fonctions

Dans toute cette section :

- I désignera un intervalle réel non vide et non réduit à un point, a un point de I ou une extrémité de I (éventuellement $\pm\infty$), $\mathscr{D}$ désignera I ou $I \setminus \{a\}$;
- toutes les fonctions considérées seront définies sur $\mathscr{D}$ à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$;
- si les fonctions sont définies en a, on supposera de plus qu'elles sont continues en a.

Rappel. On appelle *voisinage de* $a \in \overline{\mathbb{R}}$ tout ensemble V de la forme :

- si $a \in \mathbb{R}$, $V = [a-\eta, a+\eta]$, avec $\eta > 0$;
- si $a = +\infty$, $V = [A, +\infty[$ avec $A \in \mathbb{R}$;
- si $a = -\infty$, $V =]-\infty, B]$ avec $B \in \mathbb{R}$.

On note $\mathscr{V}_a$ l'ensemble des voisinages du point a.

2.1 Relations de domination, de négligeabilité

Définition.

Soient f et g deux fonctions définies sur $\mathscr{D}$ à valeurs dans $\mathbb{K}$.

- On dit que f est *dominée par* g au voisinage de a, et on note $f(x) \underset{x\to a}{=} O(g(x))$, si :

$$\exists M \in \mathbb{R},\ \exists V \in \mathscr{V}_a,\ \forall x \in V \cap \mathscr{D},\ |f(x)| \leq M|g(x)|.$$

  Dans le cas où la fonction g ne s'annule pas sur $I \setminus \{a\}$, il est équivalent d'exiger que la fonction $\frac{f}{g}$ est bornée au voisinage de a.

- On dit que f est *négligeable devant* g au voisinage de a, et on note $f(x) \underset{x\to a}{=} o(g(x))$, si :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists V \in \mathscr{V}_a,\ \forall x \in V \cap \mathscr{D},\ |f(x)| \leq \varepsilon|g(x)|.$$

  Dans le cas où la fonction g ne s'annule pas sur $I \setminus \{a\}$, il est équivalent d'exiger que la fonction $\varepsilon = \frac{f}{g}$ tend vers 0 en a (auquel cas on posera $\varepsilon(a) = 0$). Ainsi :

$$f(x) \underset{x\to a}{=} o(g(x)) \quad \Leftrightarrow \quad \forall x \in \mathscr{D},\ f(x) = \varepsilon(x)g(x) \ \text{ avec } \ \lim_{x\to a} \varepsilon(x) = 0.$$

Exemples.

- $x^2 \sin(2x) \underset{x\to 0}{=} O(x^3)$ car pour tout $x \neq 0$, $\left|\frac{x^2 \sin(2x)}{x^3}\right| \leq \frac{x^2 \times |2x|}{|x^3|} = 2$.
- Si $p < q$, alors $x^p \underset{x\to+\infty}{=} o(x^q)$ et $x^q \underset{x\to 0}{=} o(x^p)$.

Remarques.

- Si $f(x) \underset{x\to a}{=} o(g(x))$, alors $f(x) \underset{x\to a}{=} O(g(x))$.
- La relation $f(x) \underset{x\to a}{=} O(1)$ signifie que f est bornée au voisinage de a.
- La relation $f(x) \underset{x\to a}{=} o(1)$ signifie que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$.
- La relation $f(x) \underset{x\to a}{=} o((x-a)^n)$ signifie qu'il existe $\varepsilon_n : \mathscr{D} \to \mathbb{K}$ telle que :
$$\forall x \in \mathscr{D},\ f(x) = \varepsilon_n(x)(x-a)^n \ \text{ avec } \lim_{x\to a} \varepsilon_n(x) = 0.$$
- Toutes les règles de calcul énoncées pour les suites restent valables pour les fonctions.

Propriété 10 (Croissances comparées)

Soit $(\alpha, \beta) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$.
$$\ln(x)^\beta \underset{x\to+\infty}{=} o(x^\alpha), \quad x^\beta \underset{x\to+\infty}{=} o\left(e^{\alpha x}\right), \quad |\ln(x)|^\beta \underset{x\to 0}{=} o\left(\frac{1}{x^\alpha}\right), \quad e^{\alpha x} \underset{x\to-\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^\beta}\right).$$

2.2 Relation d'équivalence

Définition.

Soient f et $g : \mathscr{D} \to \mathbb{K}$.
On dit que f est *équivalente à g en a*, et on note $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$, si $f(x) - g(x) \underset{x\to a}{=} o(g(x))$, ce qui s'écrit :
$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists V \in \mathscr{V}_a,\ \forall x \in V \cap \mathscr{D},\ |f(x) - g(x)| \leq \varepsilon |g(x)|.$$
Dans le cas où la fonction g ne s'annule pas sur $I \setminus \{a\}$, il est équivalent d'exiger que la fonction $\dfrac{f}{g}$ tend vers 1 en a.

Exemples.

- Si f est continue en a, alors : $f(x) \underset{x\to a}{\sim} f(a)$ si $f(a) \neq 0$.
- Si f est dérivable en a, alors : $f(x) - f(a) \underset{x\to a}{\sim} f'(a)(x-a)$ si $f'(a) \neq 0$.
- Si $P : x \mapsto a_p x^p + a_{p-1}x^{p-1} + \dots a_q x^q$ est une fonction polynomiale avec $p \geq q$, alors :
$$P(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} a_p x^p \quad \text{et} \quad P(x) \underset{x\to 0}{\sim} a_q x^q.$$

Propriété 11

La relation $\underset{x\to a}{\sim}$ est une relation d'équivalence sur les fonctions définies sur $\mathscr{D}$. Ainsi, si f, g et h sont des fonctions définies sur $\mathscr{D}$:

- *Réflexivité :* $f(x) \underset{x\to a}{\sim} f(x)$;
- *Symétrie :* $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x) \Rightarrow g(x) \underset{x\to a}{\sim} f(x)$;
- *Transitivité :* si $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$ et $g(x) \underset{x\to a}{\sim} h(x)$, alors $f(x) \underset{x\to a}{\sim} h(x)$.

Propriété 12 (Opérations sur les équivalents)

Soient f, g , u, v quatre fonctions définies sur $\mathscr{D}$. Si $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$ et $u(x) \underset{x\to a}{\sim} v(x)$, alors :

(1) $f(x)u(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)v(x)$;

(2) si u et v ne s'annulent pas sur $\mathscr{D}$, $\frac{f(x)}{u(x)} \underset{x\to a}{\sim} \frac{g(x)}{v(x)}$;

(3) pour tout $k \in \mathbb{N}$ **fixé**, $f(x)^k \underset{x\to a}{\sim} g(x)^k$;

(4) pour $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, si f^α et g^α sont bien définies sur $\mathscr{D}$, alors $f(x)^\alpha \underset{x\to a}{\sim} g(x)^\alpha$.

Propriété 13 (Composition **à droite** dans un équivalent)

Soient f et g deux fonction définies sur $\mathscr{D}$ telles que $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$.

- Si φ est à valeurs dans $\mathscr{D}$ et $\lim\limits_{x\to b} \varphi(x) = a$, alors $f\circ\varphi(x) \underset{x\to b}{\sim} g\circ\varphi(x)$.
- Si (u_n) est à valeurs dans $\mathscr{D}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a$, alors $f(u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} g(u_n)$.

Danger.

On veillera à **ne pas additionner, soustraire ou composer à gauche des équivalents** sans justification, car les résultats obtenus sont généralement faux.

Par exemple, pour la composition à gauche, $1+2x \underset{x\to 0}{\sim} 1+x$ alors que $\ln(1+2x) \underset{x\to 0}{\sim} 2x$ et $\ln(1+x) \underset{x\to 0}{\sim} x$.

Propriété 14 (Équivalents classiques au voisinage de 0)

- $e^x - 1 \underset{x\to 0}{\sim} x$;
- $\ln(1+x) \underset{x\to 0}{\sim} x$;
- $\sin(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$;
- $\tan(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$;
- $\arcsin(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$;
- $\arctan(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$;
- $\mathrm{sh}(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$;
- $\mathrm{th}(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$;
- $(1+x)^\alpha - 1 \underset{x\to 0}{\sim} \alpha x$ où $\alpha \in \mathbb{R}^*$;
- $1-\cos(x) \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{x^2}{2}$;
- $1-\mathrm{ch}(x) \underset{x\to 0}{\sim} -\dfrac{x^2}{2}$.

Propriété 15

Soient $f, g : \mathscr{D} \to \mathbb{R}$ deux fonctions telles que $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$.

(1) Si f est de signe constant (> 0 ou < 0) au voisinage de a, alors g est de même signe strict que f au voisinage de a.

(2) La fonction g admet une limite (finie ou infinie) en a si, et seulement si, f admet une limite en a. Et alors $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x)$.

Exercice 6. Trouver les limites des expressions suivantes quand x tend vers 0 :

$$f(x) = \frac{\ln(\cos(x))}{\tan(x)^2}, \quad g(x) = \frac{1}{x^2}(e^{\mathrm{ch}(x)} - e).$$

Exercice 7. Déterminer un équivalent de $\dfrac{e^{1/x} - e^{1/x^2}}{x^2 - x}$ quand $x \to +\infty$.