Chapitre 26

Séries numériques

Compétences attendues.

✓ Étudier la convergence d'une série à termes positifs par comparaison aux séries de référence.

✓ Effectuer une comparaison série-intégrale pour obtenir la nature d'une série, un équivalent de sa somme partielle ou de son reste partiel.

✓ Calculer la somme d'une série à l'aide des séries de référence.

✓ Étudier la convergence absolue d'une série.

✓ Utiliser le critère spécial pour les séries alternées.

✓ Effectuer un développement asymptotique pour obtenir la nature d'une série.

Anthony Mansuy - Professeur en MP2I au Lycée Roosevelt (Reims)
Page personnelle : `anthony-mansuy.fr/`
E-mail : `mansuy.anthony@hotmail.fr`

1 Généralités

Dans tout le chapitre, $\mathbb{K}$ désignera $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et les suites considérées seront à valeurs dans $\mathbb{K}$.

1.1 Définitions

Définition.

Soit $(u_n)_{n\geq n_0}$ une suite numérique (à valeurs dans $\mathbb{K}$), définie à partir d'un rang $n_0 \in \mathbb{N}$.
On appelle *série de terme général* u_n, et on note $\sum\limits_{n\geq n_0} u_n$ ou encore $\sum u_n$, la suite $(S_n)_{n\geq n_0}$ définie pour tout $n \geq n_0$ par :

$$S_n = \sum_{k=n_0}^{n} u_k.$$

On dit que S_n est la *somme partielle d'ordre* n de $\sum u_n$.

Exemple. Si $(u_n) = \left(\frac{1}{2^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} = \frac{1-(\frac{1}{2})^{n+1}}{1-\frac{1}{2}} = 2 - \frac{1}{2^n}$. La série de terme général $\frac{1}{2^n}$ désigne donc la suite $\left(2 - \frac{1}{2^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

Définition.

Soit $(u_n)_{n\geq n_0}$ à valeurs réelles ou complexes.

- On dit que la série $\sum\limits_{n\geq n_0} u_n$ est *convergente*, ou qu'elle *converge*, si la suite $(S_n)_{n\geq n_0}$ de ses sommes partielles admet une limite finie dans $\mathbb{K}$.

  Dans le cas contraire, on dit que la série $\sum\limits_{n\geq n_0} u_n$ est *divergente*, ou qu'elle *diverge*.

- Si la série $\sum\limits_{n\geq n_0} u_n$ **converge**, on appelle *somme de la série*, et on note $\sum\limits_{n=n_0}^{+\infty} u_n$, la limite de la suite $(S_n)_{n\geq n_0}$, c'est-à-dire l'élément de $\mathbb{K}$ défini par :

$$\sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n = \lim_{N\to+\infty} S_N = \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=n_0}^{N} u_n.$$

Exemples.

- Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} 2 - \frac{1}{2^n} = 2$, la série $\sum\limits_{n\geq 0} \frac{1}{2^n}$ converge et sa somme est égale à $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = 2$.
- Si $u_n = \lambda \in \mathbb{C}^*$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k = \lambda(n+1)$. La suite $(\lambda(n+1))$ étant divergente, la série $\sum \lambda$ diverge.

Mise en garde.

Attention aux notations :

$\displaystyle\sum_{k=n_0}^{n} u_k$	$\sum u_n$ ou $\displaystyle\sum_{n\geq n_0} u_n$	$\displaystyle\sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n$
Somme partielle d'indice n	Série de terme général u_n : la suite $\displaystyle\left(\sum_{k=n_0}^{n} u_k\right)_{n\geq n_0}$	Somme de la série (si **convergence**) : $\displaystyle\sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n = \lim_{N\to+\infty}\sum_{n=n_0}^{N} u_n$

Propriété 1 (Convergence d'une série à valeurs complexes)

Soit $\sum u_n$ une série à valeurs complexes.

La série $\sum u_n$ converge si, et seulement si, les deux séries à valeurs réelles $\sum \mathrm{Re}(u_n)$ et $\sum \mathrm{Im}(u_n)$ convergent. Et en cas de convergence :

$$\sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=n_0}^{+\infty} \mathrm{Re}(u_n) + i\sum_{n=n_0}^{+\infty} \mathrm{Im}(u_n).$$

Définition.

Soit $\displaystyle\sum_{n\geq n_0} u_n$ une série **convergente**. Pour tout $n \geq n_0$, on pose

$$R_n = \sum_{k=n_0}^{+\infty} u_k - \sum_{k=n_0}^{n} u_k = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k,$$

appelé le *reste partiel d'ordre n de* $\sum u_n$.

Propriété 2

Avec les notations ci-dessus, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} R_n = 0$.

Tout au long de l'étude des séries, deux problématiques vont nous intéresser :

1. déterminer la *nature d'une série*, c'est-à-dire déterminer si une série converge ou non. Nous allons développer de nombreux outils généraux permettant de répondre à cette question ;
2. en cas de convergence, calculer la somme de la série. C'est un problème bien plus difficile, pour lequel il n'existe pas de méthode générale, et il existe de nombreuses séries dont on sait prouver la convergence, mais pas calculer la somme.

1.2 Premières propriétés

Propriété 3 (Indifférence des premiers termes)

On ne change pas la nature d'une série en modifiant un nombre **fini** de ses termes.

Dans la suite, afin d'alléger les notations, on considèrera des séries $\sum u_n$ dont le terme général est défini à partir du rang $n_0 = 0$ (quitte à définir égaux à 0 les premiers de la suite (u_n) s'il ne sont pas définis).

Propriété 4

Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries.

(1) Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont convergentes, alors pour tout scalaire λ, les séries $\sum(\lambda u_n)$ et $\sum(u_n + v_n)$ convergent, et :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(\lambda u_n) = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \quad \text{et} \quad \sum_{n=0}^{+\infty}(u_n + v_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \sum_{n=0}^{+\infty} v_n.$$

(2) Si $\sum u_n$ est convergente et $\sum v_n$ est divergente, alors $\sum(u_n + v_n)$ est une série divergente.

Danger.

Il est possible que la série $\sum(u_n+v_n)$ converge alors que les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ divergent (par exemple dans le cas où $u_n = 1$ et $v_n = -1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$). Dans ce cas, l'égalité :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(u_n + v_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$$

n'est plus valable puisque les termes de droite $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} v_n$ ne sont pas définis. Ainsi, pour scinder une somme en deux, on vérifiera bien au préalable que **tout converge.**

1.3 Condition nécessaire de convergence

Propriété 5 (Condition nécessaire de convergence)

(1) **Si** la série $\sum u_n$ converge, **alors** $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

(2) **Si** la suite (u_n) ne converge pas vers 0, **alors** la série $\sum u_n$ diverge. On dit alors qu'elle *diverge grossièrement*.

Exemple. La série $\sum\limits_{n\geq 0}(-1)^n$ diverge grossièrement.

Danger.

Il ne s'agit **en aucun cas d'une équivalence**, et prouver que son terme général tend vers 0 ne prouve pas la convergence d'une série !

Exercice 1. On considère la *série harmonique* $\sum\limits_{n\geq 1}\frac{1}{n}$, et on note $(H_n)_{n\geq 1}$ la suite de ses sommes partielles.

1. Montrer que pour tout $n \geq 1$, $H_{2n} - H_n \geq \frac{1}{2}$.
2. En déduire que la série $\sum\limits_{n\geq 1}\frac{1}{n}$ diverge.

La série harmonique $\sum\limits_{n\geq 1}\frac{1}{n}$ est donc un exemple d'une série divergente, mais pas grossièrement divergente.

1.4 Séries usuelles

Propriété 6 (Série télescopique)

Soit (u_n) une suite. Alors la série $\sum(u_{n+1} - u_n)$ est de même nature (convergente ou divergente) que la suite (u_n).

Remarque. Ainsi, étudier la nature d'une suite (u_n) revient à étudier la nature de la *série télescopique* $\sum(u_{n+1} - u_n)$. Et ce résultat est loin d'être anodin : nous allons bientôt disposer de nombreux outils pour prouver la convergence d'une série. Appliqués à la série $\sum(u_{n+1} - u_n)$, ils deviendront des outils pour étudier la convergence de la suite (u_n).

Exercice 2. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n(n+1)}$ est convergente et calculer sa somme.

Propriété 7 (Série géométrique)

Soit $q \in \mathbb{C}$. La série $\displaystyle\sum_{n\geq n_0} q^n$ converge si, et seulement si, $|q| < 1$.

Dans ce cas : $\displaystyle\sum_{n=n_0}^{+\infty} q^n = q^{n_0}\frac{1}{1-q}$.

Propriété 8 (Série exponentielle)

Pour tout $z \in \mathbb{C}$, la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{z^n}{n!}$ est convergente, et :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} = \exp(z).$$

Exercice 3. Montrer la convergence et calculer la somme des séries $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{4^{n+2}}{3^{2n+1}}$ et $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{n^2}{(n-1)!}$.

2 Séries à termes positifs

Dans cette partie, on énonce des résultats sur la convergence des séries **à termes positifs** (et donc en particulier réels). Toutefois ces résultats ont une portée plus importante puisque :

- multiplier par -1 ne change pas la nature de la série, et donc les résultats s'appliqueront également aux séries à termes négatifs ;
- par indifférence des premiers termes, il suffit qu'à partir d'un certain rang, u_n soit positif.

Autrement dit, les résultats qui suivent s'appliquent aux séries **de signe constant à partir d'un certain rang**.

Danger.
En revanche, ces résultats ne s'appliquent pas aux séries **qui changent de signe une infinité de fois**.

2.1 Utilisation d'inégalités

Propriété 9

Soit $\sum u_n$ une série à terme positifs.

(1) La série $\sum u_n$ converge si, et seulement si, la suite de ses sommes partielles est majorée :

$$\exists M > 0,\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=0}^{n} u_k \leq M.$$

(2) Si la série $\sum u_n$ diverge, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} u_k = +\infty$.

Propriété 10

Soient deux séries à termes positifs $\sum u_n$ et $\sum v_n$. On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$0 \leq u_n \leq v_n.$$

(1) Si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge, et $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \leq \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$.

(2) Si $\sum u_n$ diverge, alors $\sum v_n$ diverge.

Remarque. Ce résultat subsiste si l'inégalité $0 \leq u_n \leq v_n$ n'est valable qu'à partir d'un certain rang, puisqu'on ne modifie pas la nature d'une série en changeant un nombre fini de ses termes. On n'a cependant plus l'inégalité sur les sommes en cas de convergence.

2.2 Théorèmes de comparaisons

Propriété 11

Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs.
On suppose que $u_n = O(v_n)$, ce qui est en particulier le cas si $u_n = o(v_n)$.

(1) Si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge.

(2) Si $\sum u_n$ diverge alors $\sum v_n$ diverge.

Propriété 12

Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs.

Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ alors $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.

Danger.
Le critère de comparaison par équivalent est faux si les termes généraux des séries ne sont pas de signe constant. Nous en donnerons un contre-exemple à la fin de ce chapitre.

Exercice 4. Étudier la nature des séries suivantes :

(1) $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$; (2) $\sum \frac{1}{n^2}$; (3) $\sum e^{-n^2}$; (4) $\sum \frac{4^n + \cos(n)}{3^{2n} + \ln(n)}$.

2.3 Comparaison série-intégrale

Dans cette partie, considérons $f : [1, +\infty[\to \mathbb{R}_+$ une fonction continue, **positive** et **décroissante**.

Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Puisque f est décroissante, pour tout $t \in [k, k+1]$:

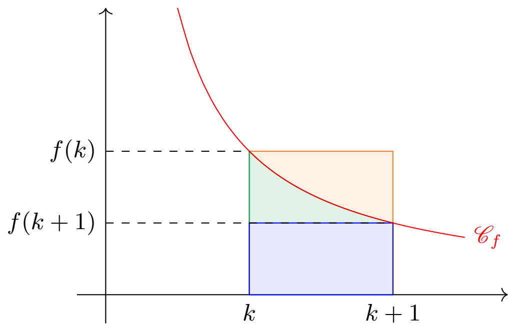
$$f(k+1) \leq f(t) \leq f(k).$$

D'où par croissance de l'intégrale :

$$\int_k^{k+1} f(k+1)\,\mathrm{d}t \leq \int_k^{k+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leq \int_k^{k+1} f(k)\,\mathrm{d}t.$$

Ce qui se récrit :

$$f(k+1) \leq \int_k^{k+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leq f(k). \qquad (*)$$



Représentation graphique de l'inégalité $(*)$ *en termes d'aires.*

On déduit de ces inégalités la propriété suivante :

Propriété 13 (Comparaison série-intégrale)

Si $f : [1, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue, **positive** et **décroissante**.

Alors la série $\sum_{n \geq 1} f(n)$ et la suite $\left(\int_1^n f(t)\,\mathrm{d}t\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ sont de même nature.

Remarques.

- Cette propriété permet de ramener l'étude de la convergence de certaines séries à celle de suites d'intégrales pour lesquelles nous avons bien plus d'outils (calcul de primitives, intégration par parties, changement de variable).
- En sommant l'inégalité $(*)$ pour k compris entre n et N, on obtient l'encadrement suivant (à l'aide de la relation de Chasles) qui conduit souvent à des inégalités intéressantes :

$$\sum_{k=n}^{N} f(k+1) \leq \int_n^{N+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leq \sum_{k=n}^{N} f(k).$$

  On pourra par exemple dans certains cas en déduire des équivalents de la somme partielle ou du reste partiel de la série $\sum f(n)$ selon qu'elle diverge ou qu'elle converge.
- Les méthodes d'encadrement de sommes à l'aide d'intégrales développées ici peuvent également s'appliquer si f est croissante, en changeant le sens des inégalités.

Exercice 5. On note toujours $(H_n)_{n\geq 1}$ la suite des sommes partielles de la série harmonique $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}$.

1. Montrer que $H_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$.
2. On pose pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $\gamma_n = H_n - \ln(n)$.
   (a) En étudiant la série $\sum_{n\geq 1}(\gamma_{n+1}-\gamma_n)$, montrer la convergence de la suite (γ_n) vers un réel $\gamma\in\mathbb{R}$.
   (b) En déduire le développement asymptotique suivant de la somme partielle de la série harmonique :
$$H_n \underset{n\to+\infty}{=} \ln(n)+\gamma+o(1).$$

Le saviez-vous ?

La limite γ de la suite $(H_n-\ln(n))$ est appelée *constante d'Euler*. On ignore à peu près tout de cette constante, et notamment si elle est rationnelle ou non. On sait en revanche que $\gamma\simeq 0,577215\ldots$ On peut être bien plus précis : Euler avait déjà obtenu 16 décimales de γ en poursuivant le développement asymptotique de (H_n). On en connait aujourd'hui plus de 600 milliards de décimales.

2.4 Séries de Riemann

On considère, pour tout $\alpha\in\mathbb{R}$, la série $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^\alpha}$, appelée *série de Riemann* d'exposant α. Pour $\alpha=1$, on retrouve la série harmonique $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}$.

Propriété 14 (Séries de Riemann)

Soit $\alpha\in\mathbb{R}$. La série $\sum\frac{1}{n^\alpha}$ converge si, et seulement si, $\alpha>1$.

Le saviez-vous ?

Pour $\alpha>1$ quelconque, on ne connait pas en général la valeur de la somme $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^\alpha}$.

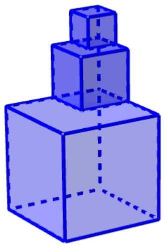
Un problème célèbre, appelé *problème de Bâle*, est justement de calculer cette valeur lorsque $\alpha=2$. Posé par Pietro Mengoli en 1644, ce problème résista aux attaques des mathématiciens éminents de l'époque.

C'est le mathématicien suisse Leonhard Euler (1707 - 1783) qui en découvrit la valeur en 1735 :
$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}.$$

On a obtenu depuis des formules pour $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^\alpha}$ lorsque α est un entier pair. Mais si α est un entier impair, ou n'est pas entier, on ne sait (presque) rien dire, et il s'agit d'un sujet de recherche actif.

Leonhard Euler (1707 - 1783)

Exemple. Piles et sommes de Riemann.



Imaginons un empilement de cubes de bois d'arêtes de longueurs $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots$ à l'infini.

Bien que de hauteur infinie (puisque la série harmonique $\sum \frac{1}{n}$ diverge), il ne faudrait qu'une quantité finie de peinture pour recouvrir cette pile (sa surface étant inférieure à $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{6}{n^2}$ qui converge), et une quantité finie de bois pour la fabriquer (son volume étant égal à $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}$ qui converge aussi).

Le saviez-vous ?

Dans ses travaux pour la résolution du problème de Bâle, Euler est amené à introduire la fonction ζ (prononcée « zeta ») définie pour tout $s > 1$ par :

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}.$$

Il démontre notamment la formule suivante liant ζ à l'ensemble des nombres premiers $\mathbb{P}$:

$$\zeta(s) = \prod_{p \in \mathbb{P}} \frac{1}{1 - p^{-s}}.$$

Dès lors, l'étude de cette fonction devient un enjeu crucial pour les mathématiciens, puisque sa compréhension améliorerait la connaissance de la répartition des nombres premiers.

Les idées d'Euler sont reprises par le mathématicien allemand Bernhard Riemann (1826 - 1866) dans un article de 1859, dans lequel il étudie (un prolongement au plan complexe de) la fonction ζ, baptisée depuis la *fonction zêta de Riemann*. Il y énonce sa célèbre conjecture, appelée *hypothèse de Riemann*, sur les points d'annulation de cette fonction : ils seraient tous, sauf zéros triviaux, sur la droite des nombres complexes de partie réelle égale à $\frac{1}{2}$!

L'hypothèse de Riemann est l'un des problèmes non résolus les plus importants des mathématiques du début du $21^{ème}$ siècle. Il fait partie des sept *Problèmes du prix du millénaire* posés par l'Institut de mathématiques Clay en 2000, qui offre un million de dollars pour sa résolution.

Si les séries de Riemann vous passionnent, si vous voulez devenir riche et célèbre, ou si vous souhaitez simplement en savoir un peu plus sur ce sujet fascinant, ce lien devrait vous intéresser.

Bernhard Riemann (1826 - 1866)

Parmi les rares séries dont on connaît déjà la nature, celles auxquelles on se réfère le plus souvent sont les séries de Riemann. Aussi, énonçons la règle suivante, qui n'est rien d'autre qu'une comparaison par négligeabilité à une série de Riemann.

Propriété 15 (Règle $n^\alpha u_n$)

Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs.

(1) S'il existe $\alpha > 1$ tel que $\lim\limits_{n \to +\infty} n^\alpha u_n = 0$, soit encore si $u_n = o\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$, alors la série $\sum u_n$ converge.

(2) Si $\lim\limits_{n \to +\infty} n u_n = +\infty$, la série $\sum u_n$ diverge.

Exercice 6. Déterminer la nature des séries suivantes :

(1) $\sum \frac{P(n)}{Q(n)}$ avec $P, Q \in \mathbb{R}[X]$; (2) $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n^2 \ln(n)}$; (3) $\sum_{n\geq 2} \frac{\ln(n)}{n^2}$.

2.5 Comparaison à une série géométrique

Propriété 16 (Règle de d'Alembert)

Soit $\sum u_n$ une série à termes strictement positifs. On suppose que $\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell \in [0, +\infty]$.

(1) Si $0 \leq \ell < 1$, la série $\sum u_n$ converge.

(2) Si $\ell > 1$, la série $\sum u_n$ diverge (grossièrement).

Dans le cas $\ell = 1$, on ne peut pas conclure : la série $\sum u_n$ peut converger ou diverger.

Danger.

Répétons-le : on ne peut rien conclure si $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$. Par exemple pour $u_n = \frac{1}{n^\alpha}$, le rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^\alpha$ tend vers 1, alors que la série $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ peut converger ou diverger (selon que $\alpha > 1$ ou $\alpha \leq 1$).

Méthode. Quand utilise-t-on la règle de d'Alembert ?

Étant donné qu'il nécessite de calculer la limite du quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n}$, ce critère est particulièrement adapté aux séries dont le terme général fait apparaître des factorielles et des puissances, car des simplifications seront alors possibles dans le calcul de $\frac{u_{n+1}}{u_n}$.

Exercice 7. Étudier la convergence de $\sum \frac{n! \times n^n}{(2n)!}$.

3 Séries dont le terme général change de signe

On traite à présent le cas des séries dont le terme général change de signe une infinité de fois. Rappelons que tous les critères de convergence énoncés au paragraphe précédent, notamment les théorèmes de comparaisons, ne peuvent s'appliquer tels quels à ces séries.

3.1 Séries absolument convergentes

Définition.

Soit (u_n) une suite à valeurs complexes.
On dit qu'une série $\sum u_n$ est *absolument convergente* si la série à termes positifs $\sum |u_n|$ est convergente.

Théorème 17 (Condition suffisante de convergence)

Soit $\sum u_n$ une série à valeurs complexes.
Si la série $\sum u_n$ converge absolument, **alors** elle converge. Et dans ce cas :

$$\left|\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n| \qquad (\textit{inégalité triangulaire généralisée}).$$

Exemples.

- La série $\sum z^n$ est absolument convergente, et donc convergente, pour tout nombre complexe $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$.
- La série $\sum_{n\geq 1} \frac{\cos(n)}{n^2}$ est absolument convergente, puisque pour tout $n \geq 1$, $0 \leq \frac{|\cos(n)|}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}$. Elle converge donc.

Remarque. Grâce à ce théorème, on ramène l'étude de la série $\sum u_n$ à valeurs complexes à celle de $\sum |u_n|$ à termes positifs pour laquelle on peut appliquer tous les résultats de la section précédente. On obtient notamment la propriété suivante comme conséquence des résultats déjà énoncés.

Propriété 18

Soient $\sum u_n$ une série à valeurs complexes et $\sum v_n$ **une série à termes positifs**.
Si $u_n = O(v_n)$ et si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ est absolument convergente, donc convergente.

Exercice 8. Étudier la nature de $\sum u_n$ lorsque :

(1) $u_n = \dfrac{n^2(1+i)^n}{2^n}$;

(2) $u_n = \sqrt{1 - \frac{1}{n}} - 1 - \ln\left(1 - \frac{1}{2n}\right)$ pour $n \geq 1$.

Danger.
La réciproque du Théorème 17 est fausse : il existe des séries convergentes qui ne sont pas absolument convergentes.

Exercice 9. On considère la *série harmonique alternée* $\sum \frac{(-1)^{n-1}}{n}$. On note (S_n) la suite de ses sommes partielles.

1. La série $\sum \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ est-elle absolument convergente ?
2. Montrer que pour tout $n \geq 1$, $S_{2n} = H_{2n} - H_n$, où $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. En déduire la convergence de $\sum \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ et calculer sa somme.

Définition.

Soit $\sum u_n$ une série à valeurs complexes.
On dit que $\sum u_n$ est *semi-convergente* si elle est convergente mais pas absolument convergente.

Propriété 19

Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à valeurs complexes absolument convergentes, et $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$.
Alors la série $\sum (\lambda u_n + \mu v_n)$ converge absolument, et :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |\lambda u_n + \mu v_n| \leq |\lambda| \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n| + |\mu| \sum_{n=0}^{+\infty} |v_n|.$$

3.2 Critère spécial des séries alternées

Théorème 20 (*Critère spécial des séries alternées*)

Soit (a_n) une **suite réelle décroissante, positive et qui tend vers** 0. Alors :

- la série $\sum(-1)^n a_n$ converge ;
- sa somme est du signe de son premier terme et lui est inférieur en valeur absolue ;
- pour tout $n \in \mathbb{N}$, le reste $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k a_k$ est du signe de son premier terme et lui est inférieur en valeur absolue, soit :

$$\text{signe}(R_n) = (-1)^{n+1} \quad \text{et} \quad \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k a_k \right| \leq a_{n+1}.$$

Exercice 10. Étudier la nature de $\sum u_n$ lorsque :

(1) $u_n = \dfrac{(-1)^{n-1}}{n^\alpha}$ où $\alpha \in \mathbb{R}$ et $n \geq 1$;

(2) $u_n = (-1)^n \dfrac{\ln(n)}{n}$.

3.3 Utilisation d'un développement asymptotique

La connaissance des séries de référence permet d'obtenir la nature d'un bon nombre de séries $\sum u_n$ en développant leur terme général u_n et en analysant leurs termes successifs.

Exercice 11. Déterminer la nature de la série $\sum_{n\geq 0} \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n}$.

Danger.

Rappelons que :

> si $u_n \sim v_n$ et (u_n) et (v_n) sont **de signes constants**, alors les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.

Attention, **ce n'est plus vrai sans l'hypothèse de signes constants** comme le montre l'exemple précédent. En effet :

$$u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n} \sim \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}.$$

Et pourtant, les séries $\sum u_n$ et $\sum \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ sont de natures différentes : on vient de voir que $\sum u_n$ diverge, alors que $\sum \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ converge par le critère spécial des séries alternées.

4 Plan d'étude d'une série numérique

Pour étudier la nature d'une série $\sum u_n$ à valeurs réelles ou complexes, on vérifie, dans l'ordre :

- si u_n tend vers 0. Si ce n'est pas le cas, elle diverge grossièrement et l'étude s'arrête ici ;
- si elle est à termes positifs, ou de signe constant à partir d'un certain rang :
  - on peut appliquer les théorèmes de comparaison/domination/équivalence avec/par des séries de références (géométrique, Riemann, exponentielle) ou des intégrales ;
  - on peut utiliser le critère de d'Alembert si le terme général fait apparaître des produits, des puissances ou factorielles.
- si elle est de signe quelconque :
  - on étudie la convergence absolue de la série ;
  - si la situation s'y prête, on applique le critère des séries alternées ;
  - on peut faire un développement asymptotique de son terme général u_n.

Liens utiles.

- *Cap sur l'hypothèse de Riemann*, Voyages au pays des maths, ARTE.
- *L'hypothèse de Riemann*, Deux (deux ?) minutes pour..., El Jj.
- *Une tour de cartes qui penche à l'infini*, Les cinq minutes Lebesgue, Samuel Tapie et Joe Viola.