

Applications linéaires

1 Généralités	2
1.1 Définition	2
1.2 Opérations sur les applications linéaires	3
1.3 Image et noyau	4
1.4 Sous-espaces stables par un endomorphisme	5
2 Isomorphismes	5
2.1 Définitions	5
2.2 Isomorphismes en dimension finie	6
2.3 Espaces isomorphes	7
2.4 Exemples d'isomorphismes en analyse	8
3 Rang d'une application linéaire	9
3.1 Généralités	9
3.2 Théorème du rang	10
4 Modes de définition d'une application linéaire	10
4.1 Utilisation d'une base	10
4.2 Utilisation d'espaces supplémentaires	11
5 Endomorphismes remarquables	11
5.1 Projecteurs	11
5.2 Symétries	12
6 Équations linéaires	14
7 Formes linéaires et hyperplans	14
7.1 Définitions et exemples	14
7.2 Hyperplans en dimension finie	15
7.3 Hyperplans affines	16

Compétences attendues.

- ✓ Montrer qu'une application est linéaire, déterminer son noyau, son image, son rang.
- ✓ Montrer qu'une application linéaire est un isomorphisme.
- ✓ Montrer qu'une application linéaire est un projecteur ou une symétrie, et déterminer ses éléments caractéristiques.

1 Généralités

Dans tout ce cours, \mathbb{K} désigne \mathbb{R} ou \mathbb{C} , mais tous les résultats énoncés restent valables pour un corps quelconque.

1.1 Définition

Définition.

Soient E, F deux \mathbb{K} -espaces vectoriels et $f : E \rightarrow F$ une application de E dans F .

On dit que f est un *morphisme d'espaces vectoriels*, ou plus simplement une *application linéaire*, si elle est compatible avec la loi de composition interne $+$ et la multiplication externe \cdot , soit si :

$$\forall (x, y) \in E^2, \forall \lambda \in \mathbb{K}, f(\lambda \cdot x + y) = \lambda \cdot f(x) + f(y).$$

On notera $\mathcal{L}(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F .

Remarque. Une application linéaire n'est rien d'autre qu'un morphisme de groupes vérifiant en plus $f(\lambda \cdot x) = \lambda \cdot f(x)$ pour tous $x \in E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

Exemples.

- $\text{id}_E : E \rightarrow E$ est linéaire. Plus généralement, toute *homothétie*, c'est-à-dire toute application de la forme $\lambda \cdot \text{id}_E$ avec $\lambda \in \mathbb{K}$, est linéaire.
- La trace et la transposition sont des applications linéaires sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, à valeurs dans \mathbb{K} pour la trace et dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ pour la transposition.
- L'application $f_a : P \in \mathbb{K}[X] \mapsto P(a) \in \mathbb{K}$ d'évaluation en $a \in \mathbb{K}$ d'un polynôme est linéaire.
- La dérivation $D : \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ définie par $D(f) = f'$ est linéaire.
- L'intégration $I : \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ définie par $I(f) : x \mapsto \int_0^x f(t) dt$ est linéaire.

Exercice 1. Montrer que l'application $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ définie par $f((x, y, z)) = (x - y, y - z, z - x)$ est linéaire.

Propriété 1

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors :

(1) $f(0_E) = 0_F$;

(2) pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tous $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ et $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$:

$$f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot x_i\right) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot f(x_i).$$

Définition.

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel.

- On appelle *endomorphisme de E* toute application linéaire de E dans E . On note $\mathcal{L}(E) = \mathcal{L}(E, E)$ l'ensemble des endomorphismes de E .
- On appelle *forme linéaire sur E* toute application linéaire de E dans \mathbb{K} . On note $E^* = \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ l'ensemble des formes linéaires sur E , aussi appelé *dual de E* .

Exemples.

- Les applications id_E , transposition et f définies précédemment sont des endomorphismes de E , $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et \mathbb{R}^3 respectivement.
- L'application d'évaluation f_a est une forme linéaire sur $\mathbb{K}[X]$, l'application trace est une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1.2 Opérations sur les applications linéaires

Propriété 2

Soient E et F des \mathbb{K} -espaces vectoriels.
L'ensemble $\mathcal{L}(E, F)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(E, F)$.

Propriété 3 (Composition d'applications linéaires)

Soient E, F et G des espaces vectoriels sur \mathbb{K} .
Si $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$, alors $g \circ f \in \mathcal{L}(E, G)$.

Propriété 4 (Bilinéarité de la composition)

Soient $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$ deux applications linéaires. Alors :

- (1) $R_g : h \mapsto g \circ h$ est une application linéaire de $\mathcal{L}(E, F)$ dans $\mathcal{L}(E, G)$;
- (2) $L_f : h \mapsto h \circ f$ est une application linéaire de $\mathcal{L}(E, F)$ dans $\mathcal{L}(E, G)$.

Propriété 5

$(\mathcal{L}(E), +, \circ)$ est un anneau (généralement non commutatif).



Pour aller plus loin.

Nous avons plus précisément montré que $(\mathcal{L}(E), +, \circ, \cdot)$ est une sous-algèbre de $\mathcal{F}(E, E)$. Pour tout polynôme $P = a_0 + a_1X + \dots + a_nX^n \in \mathbb{K}[X]$ et tout endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E)$, on peut donc définir l'endomorphisme $P(f) \in \mathcal{L}(E)$, évaluation de P en f , par :

$$P(f) = a_0f^0 + a_1f + a_2f^2 + \dots + a_nf^n$$

où $f^0 = \text{id}_E$ et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $f^k = \underbrace{f \circ \dots \circ f}_{k \text{ termes}}$.

Remarque. Toutes les règles de calculs valables dans un anneau le sont donc dans $\mathcal{L}(E)$, et en particulier le binôme de Newton et la troisième identité remarquable généralisée, sous réserve qu'on soit en présence de deux endomorphismes **qui commutent**. Notons d'ailleurs au passage que toute homothétie $\lambda \cdot \text{id}_E$ commute avec tout endomorphisme de E .

1.3 Image et noyau

Propriété 6

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ une application linéaire.

(1) Si E' est un sous-espace vectoriel de E , alors

$$f(E') = \{f(x), x \in E'\} = \{y \in F \mid \exists x \in E', y = f(x)\}$$

est un sous-espace vectoriel de F .

(2) Si F' est un sous-espace vectoriel de F , alors

$$f^{-1}(F') = \{x \in E \mid f(x) \in F'\}$$

est un sous-espace vectoriel de E .

Définition.

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ une application linéaire. On appelle :

- *image de f* le sous-espace vectoriel noté $\text{Im}(f)$ de F défini par $\text{Im}(f) = f(E)$. Ainsi, pour tout $y \in F$:

$$y \in \text{Im}(f) \Leftrightarrow \exists x \in E, y = f(x).$$

- *noyau de f* le sous-espace vectoriel noté $\text{Ker}(f)$ de E défini par $\text{Ker}(f) = f^{-1}(\{0_E\})$. Ainsi, pour tout $x \in E$:

$$x \in \text{Ker}(f) \Leftrightarrow f(x) = 0_F.$$

Propriété 7

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

(1) f est surjective si, et seulement si, $\text{Im}(f) = F$.

(2) f est injective si, et seulement si, $\text{Ker}(f) = \{0_E\}$.

Propriété 8

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ une application linéaire et $\mathcal{B} = (e_i)_{i \in I}$ une base de E . Notons $\mathcal{F} = (f(e_i))_{i \in I}$.

(1) f est injective si, et seulement si, \mathcal{F} est une famille libre de F ;

(2) f est surjective si, et seulement si, \mathcal{F} est une famille génératrice de F ;

(3) f est bijective si, et seulement si, \mathcal{F} est une base de F .

Corollaire 9

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ une application linéaire et $\mathcal{B} = (e_i)_{i \in I}$ une base de E . Alors :

$$\text{Im}(f) = \text{Vect}(f(e_i))_{i \in I}.$$

Exercice 2. Déterminer une base du noyau et de l'image des applications linéaires suivantes :

- $f : (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mapsto (x - y, y - z, z - x)$;
- $g : M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mapsto AM - \text{tr}(M)A$ où $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 3. Soient $f, g \in \mathcal{L}(E)$. Montrer l'équivalence suivante (à retenir) :

$$g \circ f = 0_{\mathcal{L}(E)} \quad \Leftrightarrow \quad \text{Im}(f) \subset \text{Ker}(g).$$

Propriété 10 (Noyau et image d'une restriction)

Soient E et F deux \mathbb{K} -espaces vectoriels, $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et A un sous-espace vectoriel de E . Alors :

$$\text{Ker}(f|_A) = A \cap \text{Ker}(f) \quad \text{et} \quad \text{Im}(f|_A) = f(A).$$

1.4 Sous-espaces stables par un endomorphisme

Définition.

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Un sous-espace vectoriel F de E est dit stable par f si $f(F) \subset F$, soit :

$$\forall x \in F, \quad f(x) \in F.$$

Exemples.

- Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Puisque $f(\{0_E\}) = \{0_E\}$ et $f(E) \subset E$, les sous-espaces $\{0_E\}$ et E sont stables par f .
- Soient $E = \mathbb{R}[X]$ et $D : P \in E \rightarrow P' \in E$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $F = \mathbb{R}_n[x]$ est stable par D .

Propriété 11

Soient $f \in \mathcal{L}(E)$ et F un sous-espace vectoriel de E stable par f .

Alors l'application induite $\tilde{f} : \begin{cases} F & \rightarrow & F \\ x & \mapsto & f(x) \end{cases}$ par f sur F est un endomorphisme de F .

Propriété 12

Soient $f \in \mathcal{L}(E)$, F un sous-espace vectoriel de E , et $(e_i)_{i \in I}$ une famille génératrice de F . Alors :

$$F \text{ est stable par } f \quad \Leftrightarrow \quad f(e_i) \in F \text{ pour tout } i \in I.$$

Exercice 4. Soient $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $u \in \mathcal{L}(E)$ définie par $u(f) = f''$. Soit $\omega \in \mathbb{R}^*$, et $F_\omega = \text{Vect}(x \mapsto \cos(\omega x), x \mapsto \sin(\omega x))$. Montrer que F_ω est stable par u et déterminer l'endomorphisme \tilde{u} induit par u sur F_ω .

2 Isomorphismes

2.1 Définitions

Définition.

Une application linéaire $f \in \mathcal{L}(E, F)$ est un *isomorphisme* si elle est bijective. Si de plus $E = F$, on dit que f est un *automorphisme* de E .

Propriété 13

Soient $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$ deux isomorphismes. Alors :

- (1) $g \circ f \in \mathcal{L}(E, G)$ est un isomorphisme ;
- (2) la bijection réciproque f^{-1} de f est un isomorphisme de F dans E .

Définition.

On appelle *groupe linéaire de E* , et on note $\text{GL}(E)$, l'ensemble des automorphismes de E .
 $(\text{GL}(E), \circ)$ est le groupe des inversibles de l'anneau $(\mathcal{L}(E), +, \circ)$.

2.2 Isomorphismes en dimension finie**Propriété 14**

Soient E et F deux \mathbb{K} -espaces vectoriels de **même dimension finie**, et $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors :

$$f \text{ est bijective} \Leftrightarrow f \text{ est injective} \Leftrightarrow f \text{ est surjective.}$$

Exercice 5. Soit $n \geq 2$. Montrer que $\varphi_n : \begin{cases} \mathbb{R}_n[X] & \rightarrow & \mathbb{R}_n[X] \\ P & \mapsto & P + P(0)X + XP'' \end{cases}$ est un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

Propriété 15

Soient E et F deux \mathbb{K} -espaces vectoriels de **même dimension finie**, et $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Il y a équivalence entre :

- (1) f est un isomorphisme de E sur F ;
- (2) f admet un inverse à gauche : il existe $g \in \mathcal{L}(F, E)$ tel que $g \circ f = \text{id}_E$;
- (3) f admet un inverse à droite : il existe $h \in \mathcal{L}(F, E)$ tel que $f \circ h = \text{id}_F$;

De plus, l'inverse à gauche g et l'inverse à droite h coïncident avec f^{-1} .

**Danger.**

Ce résultat n'est plus vrai si on ne suppose pas les espaces E et F de même dimension finie. Considérons par exemple la dérivation et l'intégration :

$$D : \begin{cases} \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) & \rightarrow & \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \\ f & \mapsto & f' \end{cases} \quad \text{et} \quad I : \begin{cases} \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}) & \rightarrow & \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \\ g & \mapsto & \int_0^x g(t) dt \end{cases} .$$

Alors $D \circ I = \text{id}_{\mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})}$ et D admet un inverse à droite. Mais D n'est pas un isomorphisme puisque $\text{Ker}(D) = \{\text{fonctions constantes}\}$ n'est pas réduit au vecteur nul.

2.3 Espaces isomorphes

Définition.

Soient E et F deux \mathbb{K} -espaces vectoriels.

On dit que E est *isomorphe* à F s'il existe un isomorphisme entre E et F . On note alors $E \simeq F$.

Remarque. La relation \simeq est une relation d'équivalence sur l'ensemble des espaces vectoriels :

- elle est réflexive : pour tout espace vectoriel E , id_E définit un isomorphisme de E dans lui-même ;
- elle est symétrique : pour tous espaces vectoriels E et F , si $f : E \rightarrow F$ est un isomorphisme, alors $f^{-1} : F \rightarrow E$ est un isomorphisme ;
- elle est transitive : pour tous espaces vectoriels E , F et G , si $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow G$ sont des isomorphismes, alors $g \circ f : E \rightarrow G$ est un isomorphisme.

Étant donné la symétrie de la relation \simeq , si $E \simeq F$, on pourra dire plus simplement que E et F sont *isomorphes*.

Notre but dans la suite est de caractériser les classes d'équivalences pour \simeq dans le cas des espaces vectoriels de dimension finie.

Propriété 16 (Formes linéaires coordonnées dans une base)

Soit E un espace vectoriel possédant une base $\mathcal{B} = (e_i)_{i \in I}$.

Pour tout $i \in I$, on définit la i -ème application coordonnée $\varphi_i : E \rightarrow \mathbb{K}$ dans la base \mathcal{B} par :

$$\varphi_i(x) = i\text{-ème coordonnée de } x \in E \text{ dans la base } \mathcal{B}.$$

L'application φ_i est une forme linéaire pour tout $i \in I$.

Exemple. Prenons le vecteur $u = (3, 2, 1) \in \mathbb{R}^3$.

- Dans la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$, u s'écrit $u = 3e_1 + 2e_2 + 1e_3$. Si on note φ_i les formes linéaires coordonnées dans la base \mathcal{B} , on obtient :

$$\varphi_1(u) = 3, \varphi_2(u) = 2, \varphi_3(u) = 1.$$

- Dans la base $\mathcal{B}' = (f_1, f_2, f_3)$ où $f_1 = (1, 0, 0)$, $f_2 = (1, 1, 0)$, $f_3 = (1, 1, 1)$, u se décompose :

$$u = f_1 + f_2 + f_3.$$

Si on note ψ_i les formes linéaires coordonnées dans la base \mathcal{B}' , on obtient cette fois :

$$\psi_1(u) = 1, \psi_2(u) = 1, \psi_3(u) = 1.$$

Propriété 17 (Propriétés des formes linéaires coordonnées dans une base)

Soit E un espace vectoriel possédant une base $\mathcal{B} = (e_i)_{i \in I}$. Notons $(\varphi_i)_{i \in I}$ la famille des formes linéaires coordonnées dans la base \mathcal{B} . Alors :

$$(1) \text{ pour tout } x \in E : \quad x = \sum_{i \in I} \varphi_i(x) e_i ;$$

$$(2) \text{ pour tous } i, j \in I : \quad \varphi_i(e_j) = \delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}.$$

Propriété 18

Soient E un espace vectoriel de dimension finie n , $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E et $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ les formes linéaires coordonnées dans la base \mathcal{B} .

L'application $\varphi : E \rightarrow \mathbb{K}^n$ définie par :

$$\forall x \in E, \quad \varphi(x) = (\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x))$$

est un isomorphisme. Ainsi, E et \mathbb{K}^n sont isomorphes.

Propriété 19

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n , et F un espace vectoriel.

Alors F est isomorphe à E si, et seulement si, F est de dimension finie et $\dim(F) = n$.

En particulier, tout \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie n est isomorphe à \mathbb{K}^n .

Remarque. Ainsi, si on considère l'ensemble des espaces vectoriels de dimension finie, les classes d'équivalences pour la relation \simeq sont paramétrées par les entiers naturels, deux espaces vectoriels E et F étant dans la même classe d'équivalence si, et seulement si, ils ont même dimension.

**Méthode. Comment déterminer la dimension d'un espace vectoriel ?**

Pour montrer que E est de dimension finie n , on peut :

- exhiber une base formée de n vecteurs ;
- exhiber un isomorphisme avec un espace dont on sait qu'il est de dimension n .

Propriété 20

Soient E un espace vectoriel, $f \in \mathcal{L}(E)$ **injective** et F un sous-espace de E de dimension finie.

Alors $f(F)$ est de dimension finie et $\dim(f(F)) = \dim(F)$.

2.4 Exemples d'isomorphismes en analyse**Équations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients constants**

Soient $b, c \in \mathbb{K}$. Considérons l'ensemble \mathcal{S}_0 des fonctions $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K}$ de classe \mathcal{C}^2 telles que :

$$y'' + by' + cy = 0.$$

On a montré les résultats suivants au **Chapitre 10. Équations différentielles linéaires** :

- \mathcal{S}_0 est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{K})$;
- pour tout réel t_0 , l'application $\Psi : \begin{cases} \mathcal{S}_0 & \rightarrow & \mathbb{K}^2 \\ y & \mapsto & (y(t_0), y'(t_0)) \end{cases}$ est un isomorphisme de \mathcal{S}_0 dans \mathbb{K}^2 . En effet, on vérifie aisément qu'elle est linéaire, et elle est bijective d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz (qui assure l'unicité de la solution à un problème de Cauchy).

Ainsi, l'ensemble \mathcal{S}_0 des solutions d'une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 2 à coefficients constants est un espace vectoriel de dimension 2, c'est-à-dire un plan vectoriel.

Suites récurrentes linéaires d'ordre 2 à coefficients constants

Soient $b, c \in \mathbb{K}$. On considère le sous-ensemble \mathcal{S}_0 de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ constitué des suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ satisfaisant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n = 0. \quad (*)$$

L'équation (EC) : $r^2 + br + c = 0$ est appelée *équation caractéristique* associée à la relation de récurrence linéaire.

Propriété 21

L'ensemble \mathcal{S}_0 est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ de dimension 2.

On retrouve alors plus aisément le résultat suivant.

Propriété 22 (Suites récurrentes linéaires d'ordre 2 - Cas où $\mathbb{K} = \mathbb{C}$)

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite appartenant à \mathcal{S}_0 . Alors :

(1) si (EC) admet deux racines distinctes r_1 et r_2 , il existe un unique couple $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n.$$

(2) si (EC) admet une racine double r , il existe un unique couple $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \lambda r^n + \mu n r^n.$$

3 Rang d'une application linéaire

3.1 Généralités

Définition.

Soient E et F des \mathbb{K} -espaces vectoriels, et $f : E \rightarrow F$ une application linéaire.

On dit que f est *de rang fini* si $\text{Im}(f)$ est de dimension finie. Dans ce cas, on appelle *rang de f* , et on note $\text{rg}(f)$, la dimension $\dim(\text{Im}(f))$ de son image.

Propriété 23

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

(1) Si E est de dimension finie et si $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est une base de E , alors f est de rang fini, et $\text{rg}(f) = \text{rg}(f(e_1), \dots, f(e_n))$.

(2) Si F est de dimension finie, alors f est de rang fini.

Propriété 24

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ où E et F sont deux espaces de dimension finie. Alors :

(1) $\text{rg}(f) \leq \min(\dim(E), \dim(F))$;

(2) f est surjective si, et seulement si, $\text{rg}(f) = \dim(F)$;

(3) f est injective si, et seulement si, $\text{rg}(f) = \dim(E)$.

Propriété 25 (Invariance du rang par isomorphismes)

Soient E, F des \mathbb{K} -espaces vectoriels de dimension finie, et $f \in \mathcal{L}(E, F)$ une application linéaire de rang fini. Alors :

$$(1) \quad \forall u \in \text{GL}(E), \text{rg}(f \circ u) = \text{rg}(f) ; \quad (2) \quad \forall v \in \text{GL}(F), \text{rg}(v \circ f) = \text{rg}(f).$$

3.2 Théorème du rang**Propriété 26** (Forme géométrique du théorème du rang)

Soient E et F deux \mathbb{K} -espaces vectoriels et $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

Supposons qu'il existe un supplémentaire S de $\text{Ker}(f)$ dans E . Alors $f|_S^{\text{Im}(f)}$ est un isomorphisme de S sur $\text{Im}(f)$.

Théorème 27 (du rang)

Soient E et F des \mathbb{K} -espaces vectoriels avec E de dimension finie, et soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors :

$$\dim(E) = \dim(\text{Ker}(f)) + \text{rg}(f).$$

**Danger.**

Attention, il s'agit **uniquement** d'une égalité de dimension : en général, on n'a pas $E = \text{Ker}(f) \oplus \text{Im}(f)$.

Exercice 6. Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie, et soit $f \in \mathcal{L}(E)$ telle que $f^3 = 0_{\mathcal{L}(E)}$. Montrer que $\text{rg}(f) + \text{rg}(f^2) \leq \dim(E)$.

4 Modes de définition d'une application linéaire**4.1 Utilisation d'une base****Propriété 28**

Soient E et F deux espaces vectoriels. On suppose que E possède une base $\mathcal{B} = (e_i)_{i \in I}$.

Pour toute famille $(v_i)_{i \in I}$ de vecteurs de F , il existe une et une seule application linéaire $f : E \rightarrow F$ telle que :

$$\forall i \in I, f(e_i) = v_i.$$

Corollaire 29

(1) Deux applications linéaires qui coïncident sur une base sont égales.

(2) Une application linéaire s'annulant sur une base est nulle.

Propriété 30

Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie. Alors $\mathcal{L}(E, F)$ est un espace vectoriel de dimension finie, et :

$$\dim(\mathcal{L}(E, F)) = \dim(E) \times \dim(F).$$

4.2 Utilisation d'espaces supplémentaires

Propriété 31

Soient E_1 et E_2 deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E , et soit F un espace vectoriel. Pour tout couple $(f_1, f_2) \in \mathcal{L}(E_1, F) \times \mathcal{L}(E_2, F)$, il existe une et une seule application linéaire $f : E \rightarrow F$ telle que :

$$f|_{E_1} = f_1 \quad \text{et} \quad f|_{E_2} = f_2.$$

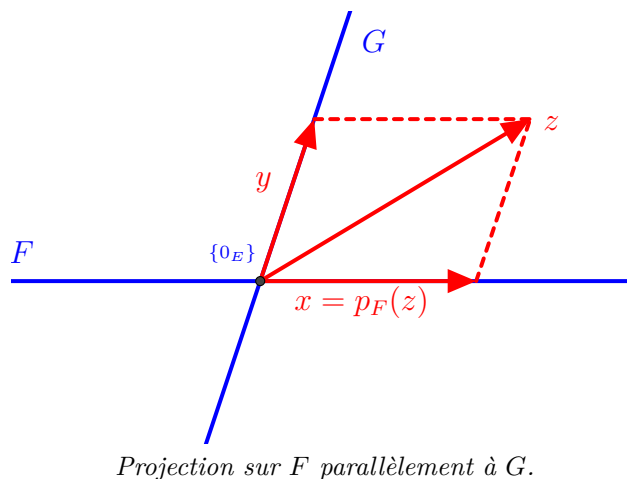
5 Endomorphismes remarquables d'un espace vectoriel

5.1 Projecteurs

Définition.

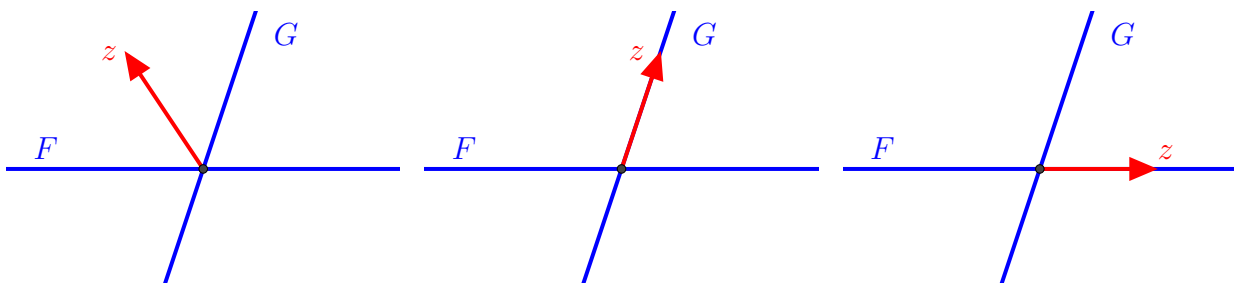
Soient F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E . Pour tout $z \in E$, il existe donc un unique couple $(x, y) \in F \times G$ tel que $z = x + y$.

- Le vecteur x est appelé la *projection de z sur F parallèlement à G* , et noté $p(z)$.
- L'application $p : E \rightarrow E$ ainsi définie est appelée le *projecteur sur F parallèlement à G*



Exemple. Notre ombre est la projection de notre silhouette sur le sol parallèlement aux rayons du soleil.

Exercice 7. Déterminer graphiquement la projection de z sur F parallèlement à G dans les cas suivants.



Propriété 32 (Propriétés des projecteurs)

- (1) p est un endomorphisme de E satisfaisant $p \circ p = p$.
- (2) $F = \text{Im}(p) = \text{Ker}(p - \text{id}_E)$ et $G = \text{Ker}(p)$, de sorte que :

$$\forall x \in F, \quad p(x) = x \quad \text{et} \quad \forall y \in G, \quad p(y) = 0_E.$$

Remarque. Le projecteur sur F parallèlement à G est l'unique application linéaire $p : E \rightarrow E$ telle que :

$$p|_F = \text{id}_F \quad \text{et} \quad p|_G = 0_{\mathcal{L}(G)}.$$

Propriété 33 (Caractérisation algébrique des projecteurs)

Soit $p \in \mathcal{L}(E)$. Alors :

$$p \text{ est un projecteur} \quad \Leftrightarrow \quad p \circ p = p.$$

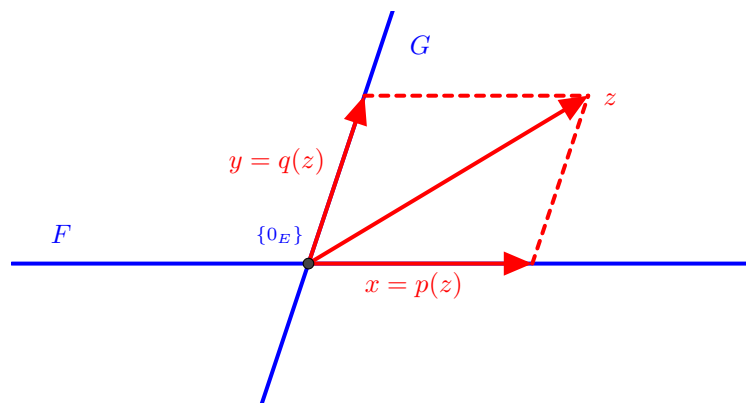
Plus précisément, $E = \text{Im}(p) \oplus \text{Ker}(p)$ et p est le projecteur sur $\text{Im}(p)$ parallèlement à $\text{Ker}(p)$.

Exercice 8. Soit $f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \rightarrow \\ (x, y) & \mapsto \frac{1}{3}(-x + 2y, -2x + 4y) \end{cases} \cdot \mathbb{R}^2$. Montrer que f est un projecteur de \mathbb{R}^2 et déterminer ses éléments caractéristiques.

Définition.

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E . On dit que p et q sont les *projecteurs associés à la décomposition* $E = F \oplus G$ si :

- p le projecteur sur F parallèlement à G ;
- q le projecteur sur G parallèlement à F .



Projecteurs associés à la décomposition $E = F \oplus G$.

Propriété 34 (Propriétés des projecteurs associés)

Si p et q sont deux projecteurs associés, alors :

- (1) $p + q = \text{id}_E$;
- (2) $p \circ q = q \circ p = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

5.2 Symétries

Définition.

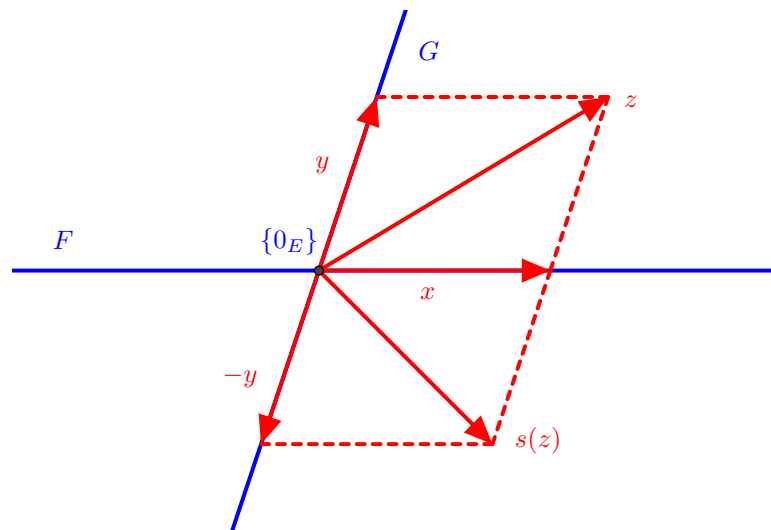
Soient F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E , de sorte que pour tout $z \in E$, il existe un unique couple $(x, y) \in F \times G$ tel que :

$$z = x + y.$$

On appelle *symétrie de z par rapport à F dans la direction de G* , et on note $s(z)$, le vecteur :

$$s(z) = x - y.$$

L'application $s : E \rightarrow E$ ainsi définie est appelée la *symétrie par rapport à F dans la direction de G* .

Symétrie de z par rapport à F dans la direction de G .**Propriété 35** (Propriétés des symétries)

Soient F et G des sous-espaces vectoriels supplémentaires de E , p et q les projecteurs associés à la décomposition $E = F \oplus G$. Soit s la symétrie par rapport à F dans la direction de G . Alors :

- (1) $s = p - q = 2p - \text{Id}_E$. En particulier, s est un endomorphisme de E .
- (2) $s \circ s = \text{id}_E$. En particulier, s est un automorphisme de E , et $s^{-1} = s$.
- (3) $F = \text{Ker}(s - \text{Id}_E)$ et $G = \text{Ker}(s + \text{Id}_E)$, de sorte que :

$$\forall x \in F, \quad s(x) = x \quad \text{et} \quad \forall y \in G, \quad s(y) = -y.$$

Remarque. Ainsi, la symétrie par rapport à F dans la direction de G est l'unique application linéaire $s : E \rightarrow E$ telle que :

$$s|_F = \text{id}_F \quad \text{et} \quad s|_G = -\text{id}_G.$$

Propriété 36 (Caractérisation algébrique d'une symétrie)

Soit $s \in \mathcal{L}(E)$. Alors :

$$s \text{ est une symétrie} \quad \Leftrightarrow \quad s \circ s = \text{Id}_E.$$

Plus précisément, $E = \text{Ker}(s - \text{id}_E) \oplus \text{Ker}(s + \text{id}_E)$ et s est la symétrie par rapport à $\text{Ker}(s - \text{id}_E)$ dans la direction de $\text{Ker}(s + \text{id}_E)$.

Exercice 9. À tout $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, on associe l'élément $T(f) \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ défini par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad T(f)(x) = f(-x).$$

Montrer que T est une symétrie de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et donner ses éléments caractéristiques.

6 Équations linéaires

Définition.

On appelle *équation linéaire* toute équation de la forme $f(x) = b$ avec :

- $f : E \rightarrow F$ une application linéaire entre deux espaces vectoriels E et F ;
- b un vecteur de F appelé *second membre de l'équation* ;
- $x \in E$ un vecteur inconnu.

On appelle *équation homogène associée* à $f(x) = b$ l'équation linéaire $f(x) = 0_F$.

Exemples.

- L'application $\varphi : \begin{cases} \mathcal{C}^2(I, \mathbb{K}) & \rightarrow & \mathcal{C}^0(I, \mathbb{K}) \\ y & \mapsto & y'' + by' + cy \end{cases}$ est linéaire, et résoudre $y'' + by' + cy = d(t)$, c'est résoudre l'équation linéaire $\varphi(y) = d$.
- L'application $\psi : \begin{cases} \mathbb{R}^{\mathbb{N}} & \rightarrow & \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \\ (u_n)_{n \in \mathbb{N}} & \mapsto & (u_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n)_{n \in \mathbb{N}} \end{cases}$ est linéaire, et résoudre $u_{n+2} + au_{n+1} + bu_n = v_n$, c'est résoudre l'équation linéaire $\psi((u_n)_{n \in \mathbb{N}}) = (v_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
- Si $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, alors l'application $f_A : \begin{cases} \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K}) & \rightarrow & \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \\ X & \mapsto & AX \end{cases}$ est linéaire, et résoudre le système $AX = B$, c'est résoudre l'équation linéaire $f_A(X) = B$.

Propriété 37 (Structure des solutions de l'équation linéaire $f(x) = b$)

- (1) L'ensemble des solutions de $f(x) = 0_F$ est le sous-espace vectoriel $\text{Ker}(f)$.
- (2) L'ensemble \mathcal{S} des solutions de $f(x) = b$ est non vide si, et seulement si, $b \in \text{Im}(f)$, et alors \mathcal{S} est un sous-espace affine de direction $\text{Ker}(f)$:

$$\mathcal{S} = x_0 + \text{Ker}(f)$$

où x_0 est une solution particulière de $f(x) = b$.

7 Formes linéaires et hyperplans

7.1 Définitions et exemples

Définition.

Soient E un \mathbb{K} -espace vectoriel, et H un sous-espace vectoriel de E .

On dit que H est un *hyperplan de E* s'il existe une forme linéaire **non nulle** φ telle que $H = \text{Ker}(\varphi)$.

L'équation linéaire $\varphi(x) = 0$ est alors appelée *équation de l'hyperplan H* .

Exemples.

- $H = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + 2y - t = 0\}$ est un hyperplan de \mathbb{R}^4 car noyau de la forme linéaire non nulle $\varphi : (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mapsto x + 2y - t$.
- $K = \left\{ f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f(0) = f'(0) \right\}$ est un hyperplan de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ en tant que noyau de la forme linéaire non nulle $\psi : f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mapsto f(0) - f'(0)$.
- $\text{Ker}(\text{tr}) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mid \text{tr}(M) = 0\}$ est un hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ car noyau de la trace qui est une forme linéaire non nulle sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Propriété 38 (Caractérisation géométrique des hyperplans)

Soient E un espace vectoriel, et H un sous-espace vectoriel de E .

Alors H est un hyperplan de E si, et seulement si, H est supplémentaire d'une droite vectorielle.

De plus, si H est un hyperplan de E , alors pour tout $u \notin H$:

$$E = H \oplus \text{Vect}(u).$$

Exemple. Puisque la fonction $u : x \in \mathbb{R} \mapsto 1$ n'appartient pas à K (car $u(0) = 1 \neq 0 = u'(0)$) :

$$\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = K \oplus \text{Vect}(u).$$

Propriété 39 (Comparaison des équations d'un hyperplan)

Soient φ_1 et φ_2 deux formes linéaires sur E . Alors :

$$\text{Ker}(\varphi_1) = \text{Ker}(\varphi_2) \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{K}^*, \varphi_1 = \lambda \varphi_2.$$

Ainsi, l'équation linéaire $\varphi(x) = 0$ définissant un hyperplan $H = \text{Ker}(\varphi)$ est unique à un scalaire multiplicatif non nul près.

7.2 Hyperplans en dimension finie

Propriété 40 (Caractérisation en dimension finie)

Soient E est un espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$, et H un sous-espace vectoriel de E .

Alors H est un hyperplan de E si, et seulement si, $\dim(H) = n - 1$.

Exemples.

- Un hyperplan du plan est une droite vectorielle, un hyperplan de l'espace est un plan vectoriel.
- $\text{Ker}(\text{tr})$ est de dimension $n^2 - 1$ en tant qu'hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, un supplémentaire de $\text{Ker}(\text{tr})$ étant par exemple $\text{Vect}(I_n)$ puisque $I_n \notin \text{Ker}(\text{tr})$.

Propriété 41

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n , $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E .

Alors E^* est de dimension finie égale à n , et la famille $\mathcal{B}^* = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ des formes coordonnées dans la base \mathcal{B} est une base de E^* appelée *base duale de \mathcal{B}* .

Conséquence. Soit E de dimension finie dont on fixe une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$. Notons $\mathcal{B}^* = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ la base de E^* des formes coordonnées relativement à \mathcal{B} . Tout forme linéaire $\varphi \in E^*$ non nulle se décompose de manière unique dans \mathcal{B}^* sous la forme :

$$\varphi = \sum_{i=1}^n a_i \varphi_i.$$

L'équation de l'hyperplan $H = \text{Ker}(\varphi)$ se réécrit, pour tout vecteur $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ de E :

$$0 = \varphi(x) = \sum_{i=1}^n a_i \varphi_i(x) = \sum_{i=1}^n a_i x_i.$$

On parle alors d'*équation cartésienne de l'hyperplan H dans la base \mathcal{B}* .

Exemples.

- La forme linéaire $\varphi : (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mapsto x + 2y - t$ se décompose sous la forme $\varphi = \varphi_1 + 2\varphi_2 - \varphi_4$ dans la base duale de la base canonique de \mathbb{R}^4 , de sorte que l'hyperplan $H = \text{Ker}(\varphi)$ a pour équation cartésienne $x + 2y - t = 0$ dans la base canonique.
- L'hyperplan $\text{Ker}(\text{tr})$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ a une équation cartésienne simple dans la base canonique : c'est l'ensemble des $M = (m_{i,j})_{i,j \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ tels que $m_{1,1} + \dots + m_{n,n} = 0$.

Exercice 10. Montrer que $H = \left\{ P \in \mathbb{R}_n[X] \mid \int_0^1 P(t) dt = 0 \right\}$ est un hyperplan de $\mathbb{R}_n[X]$, et donner son équation cartésienne dans la base canonique.

Propriété 42 (Représentation d'un sous-espace)

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie non nulle n et $r \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

(1) Si H_1, \dots, H_r sont r hyperplans, alors : $\dim \left(\bigcap_{i=1}^r H_i \right) \geq n - r$.

(2) Si F est un sous-espace vectoriel de E de dimension $n - r$, alors il existe des hyperplans H_1, \dots, H_r tels que $F = \bigcap_{i=1}^r H_i$.

Remarque. Notons $H_i = \text{Ker}(\varphi_i)$ avec $\varphi_i \in E^*$ pour tout $1 \leq i \leq r$. Pour tout $x \in E$:

$$x \in \bigcap_{i=1}^r H_i \iff \begin{cases} \varphi_1(x) = 0 \\ \vdots \\ \varphi_r(x) = 0 \end{cases}.$$

- Le point (1) de la propriété précédente justifie l'idée que chaque contrainte linéaire $\varphi_i(x) = 0$ occasionne potentiellement la perte d'une dimension par rapport à la dimension totale $\dim(E)$.
- Le point (2) nous fournit, en fixant une base \mathcal{B} de E , un système de r équations cartésiennes à n inconnues définissant le sous-espace F , appelé *système d'équations cartésiennes de F* ou *représentation cartésienne de F dans la base \mathcal{B}* .

Exercice 11. Donner la représentation cartésienne de $F = \text{Vect}((1, 1, 1, 1), (1, -1, 1, -1))$ dans la base canonique de \mathbb{R}^4 .

7.3 Hyperplans affines

Définition.

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel, et \mathcal{H} un sous-espace affine de E .

On dit que \mathcal{H} est un *hyperplan affine de E* s'il existe une forme linéaire **non nulle** φ et $b \in \mathbb{K}$ tels que $\mathcal{H} = \varphi^{-1}(\{b\}) = \{x \in E \mid \varphi(x) = b\}$.

L'équation linéaire $\varphi(x) = b$ est appelée *équation de l'hyperplan affine H* .

Propriété 43

Soient E un \mathbb{K} -espace vectoriel, et \mathcal{H} un sous-espace affine de E .

\mathcal{H} est un hyperplan affine si, et seulement si, sa direction H est un hyperplan vectoriel de E .

Les résultats obtenus pour les hyperplans vectoriels s'étendent alors naturellement au cas affine.

Remarque. On retrouve ici les faits bien connus suivants :

- dans un espace de dimension 2, les hyperplans affines - ou droites affines - sont les ensembles d'équation cartésienne $ax + by = c$ avec $(a, b) \neq (0, 0)$;
- dans un espace de dimension 3, les hyperplans affines - ou plans affines - sont les ensembles d'équation cartésienne $ax + by + cz = d$ avec $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$.

Exemple. Considérons un système d'équations linéaires de n équations à p inconnues :

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,p}x_p = b_1 \\ \vdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \cdots + a_{n,p}x_p = b_p \end{cases} \quad \text{qu'on récrit} \quad \begin{cases} \varphi_1(x) = b_1 \\ \vdots \\ \varphi_n(x) = b_n \end{cases}$$

où φ_i est la forme linéaire non nulle $\varphi_i : (x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{K}^p \mapsto a_{i,1}x_1 + a_{i,2}x_2 + \cdots + a_{i,p}x_p$ pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

L'ensemble \mathcal{S} des solutions du système apparait ainsi comme l'intersection $\bigcap_{i=1}^n \mathcal{H}_i$ des n hyperplans affines

$\mathcal{H}_i = \varphi_i^{-1}(\{b_i\})$ de \mathbb{K}^p . C'est donc soit l'ensemble vide, soit un sous-espace affine de direction $\bigcap_{i=1}^n \text{Ker}(\varphi_i)$, de dimension supérieure ou égale à $p - n$.