Chapitre 28

Espaces probabilisés finis

Compétences attendues.

✓ Savoir modéliser une expérience probabiliste en la traduisant en langage mathématique.

✓ Maitriser les principes de calculs des probabilités.

✓ Reconnaître les situations d'applications de la formule des probabilités composées, des formules des probabilités totales ou de la formule de Bayes.

✓ Introduire un système complet d'événements adéquat en vue d'appliquer la formule des probabilités totales.

Anthony Mansuy - Professeur en MP2I au Lycée Roosevelt (Reims)

Page personnelle : `anthony-mansuy.fr/`

E-mail : `mansuy.anthony@hotmail.fr`

1 Espaces probabilisés finis

Intuitivement, une *expérience aléatoire* est une expérience dont le résultat ne peut être prédit avec certitude. Dans ce chapitre, nous introduisons la notion d'*espace probabilisé*, cadre théorique et déterministe permettant de modéliser une telle expérience. Dans la suite, il n'y aura donc aucun hasard, nous ne ferons que le modéliser. Un résultat fondamental, la *loi faible des grands nombres*, viendra confirmer un peu plus tard que tout ce formalisme répond bien à l'intuition que l'on se fait d'une probabilité.

1.1 Univers, événements

On souhaite modéliser une expérience aléatoire.

Définition.

On appelle *univers* un ensemble Ω non vide. Les éléments ω de Ω sont appelés *issues* ou *réalisations*.

Remarque. L'univers Ω modélisera l'ensemble des résultats possibles de l'expérience aléatoire. Par exemple :

- le lancer d'une pièce sera modélisé par l'univers $\Omega = \{\text{pile}, \text{face}\}$ ou $\{0, 1\}$;
- le lancer d'un dé sera modélisé par l'univers $\Omega = [\![1, 6]\!]$, le lancer de deux dés par $\Omega = [\![1, 6]\!]^2$;
- le tirage d'une main de 5 cartes d'un jeu de 52 cartes sera modélisé par l'ensemble $\Omega = \mathscr{P}_5\left(\left\{\boxed{2\spadesuit}, \boxed{2\diamondsuit}, \dots, \boxed{\text{A}\clubsuit}, \boxed{\text{A}\heartsuit}\right\}\right)$ des parties à 5 éléments de l'ensemble des 52 cartes.

Remarque. Nous nous limiterons cette année à la modélisation d'expériences aléatoires ayant un nombre fini de résultats possibles. Ainsi, Ω désignera dans la suite un *univers fini*, c'est-à-dire un ensemble **fini** non vide. Cette contrainte est uniquement technique, le cas des univers infinis nécessitant un peu plus de précautions. Du fait de cette contrainte, il nous sera par exemple impossible :

- de jouer à pile ou face indéfiniment et de s'intéresser au rang d'apparition du premier pile ;
- d'étudier la durée de vie d'un appareil électrique.

La première expérience relève des probabilités dîtes *discrètes*, lorsque l'univers Ω est dénombrable (en bijection avec $\mathbb{N}$), au programme de deuxième année. La seconde entre dans le cadre des *probabilités continues* et est hors programme en classes préparatoires : exit donc les variables à densités, et les lois exponentielles, normales, ...

Dans toute la suite, on considère un **univers fini Ω fixé**.

Définition.

On appelle *événement* toute partie de l'univers Ω, c'est-à-dire tout élément de $\mathscr{P}(\Omega)$.
L'événement $\emptyset$ est appelé *événement impossible* tandis que Ω est appelé *événement certain*. Un singleton $\{\omega\}$ avec $\omega \in \Omega$ est appelé *événement élémentaire*.

Exemples.

- Lorsqu'on lance un dé, l'événement « obtenir un nombre pair » est $\{2, 4, 6\}$.
- Lorsqu'on lance deux dés, l'événement « la somme des dés vaut 6 » est $\{(1, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 2), (5, 1)\}$.
- Lorsqu'on tire une main au poker, l'événement « avoir une quint flush royale » est l'ensemble à 4 éléments $\left\{\left\{\boxed{\text{A}\clubsuit}, \boxed{\text{R}\clubsuit}, \boxed{\text{D}\clubsuit}, \boxed{\text{V}\clubsuit}, \boxed{10\clubsuit}\right\}, \dots, \left\{\boxed{\text{A}\diamondsuit}, \boxed{\text{R}\diamondsuit}, \boxed{\text{D}\diamondsuit}, \boxed{\text{V}\diamondsuit}, \boxed{10\diamondsuit}\right\}\right\}$

Définition.

Soient A et B deux événements de Ω. Alors :

- l'*événement contraire* de A est le complémentaire de A dans Ω, noté $\overline{A}$;
- l'*union des événements* A et B est l'ensemble $A \cup B$, prononcé communément « A ou B » ;
- l'*intersection des événements* A et B est l'ensemble $A \cap B$, prononcé « A et B ».

Lorsque $A \subset B$, on dit que l'événement A *implique* l'événement B ou encore que A *entraîne* B.

Exercice 1. Considérons une urne, qui contient a boules blanches et b boules noires. On tire n boules de cette urne avec remise entre les tirages. Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on note B_i (resp. N_i) l'événement « la i-ème boule tirée est blanche (resp. noire) ».

1. Déterminer l'univers Ω modélisant cette expérience, et décrire l'événement B_i pour tout $i \in [\![1, n]\!]$.
2. Identifier les événements $\bigcap_{i=1}^{n} B_i$, $\overline{\bigcap_{i=1}^{n} B_i}$, $\bigcup_{i=1}^{n-1} B_i \cap B_{i+1}$, $\overline{\left(\bigcup_{i=1}^{n-1} B_i \cap B_{i+1}\right) \cup \left(\bigcup_{i=1}^{n-1} N_i \cap N_{i+1}\right)}$.

Définition.

- Deux événements A et B sont dits *incompatibles* ou *disjoints* si $A \cap B = \emptyset$.
- Soit $k \geq 3$. Des événements $A_1, \dots, A_k$ sont dits *deux à deux incompatibles* si, pour tout couple (i, j) d'éléments distincts de $[\![1, k]\!]$, $A_i \cap A_j = \emptyset$.

Exemples.

- Si A est un événement, alors A et $\overline{A}$ sont incompatibles.
- Les événements élémentaires $\{\omega\}$ pour $\omega \in \Omega$ sont deux à deux incompatibles.

1.2 Probabilités

Nous aimerions désormais, pour chaque événement, pouvoir parler de sa probabilité.

Définition.

On appelle *probabilité sur* Ω toute application $P : \mathscr{P}(\Omega) \to [0, 1]$ telle que :

- $P(\Omega) = 1$;
- pour tout couple (A, B) d'événements :

$$A \cap B = \emptyset \quad \Rightarrow \quad P(A \cup B) = P(A) + P(B) \quad (\textit{propriété d'additivité}).$$

On appelle *espace probabilisé fini* un couple (Ω, P) où Ω est un univers fini et P une probabilité sur Ω.

Remarque. Quand on lance un dé par exemple, c'est au moment de choisir la probabilité que l'on met sur $[\![1, 6]\!]$ que l'on décide si notre dé est équilibré ou non. Par exemple, dans le cas où le dé tombe toujours sur 6, on utilisera la probabilité sur $\mathscr{P}([\![1, 6]\!])$ définie par $P(A) = \begin{cases} 0 & \text{si } 6 \notin A \\ 1 & \text{si } 6 \in A \end{cases}$.

Propriété 1 (Exemple de la probabilité uniforme)

On définit une probabilité sur Ω en posant pour tout événement A de Ω :

$$P(A) = \frac{\operatorname{Card}(A)}{\operatorname{Card}(\Omega)} = \frac{\text{nombre de cas favorables (c'est-à-dire où } A \text{ est réalisé)}}{\text{nombre de cas possibles}}.$$

On l'appelle la *probabilité uniforme* sur Ω. On dit aussi qu'on se trouve dans une situation d'*équiprobabilité*.

Mise en garde.

La formule $P(A) = \dfrac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}}$ n'est valable que pour les **cas équiprobables**. Elle est valide par exemple dans le cas d'un dé équilibré, mais pas dans celui d'un dé truqué.

Exemple. La probabilité de l'événement A : « obtenir un nombre pair » pour un dé équilibré est

$$P(A) = \frac{\text{Card}(\{2,4,6\})}{\text{Card}(\{1,2,3,4,5,6\})} = \frac{1}{2}.$$

Rédaction.

Si tel est le cas, on indiquera bien qu'on est dans une situation d'équiprobabilité avant tout calcul de probabilités.

Exercice 2. On choisit au hasard une matrice carrée d'ordre 2 à coefficients dans $\{-1,1\}$. Quelle est la probabilité qu'elle soit de rang 1 ?

Le saviez-vous ?

Le *Problème des partis* est une question qui joue un rôle fondamental dans l'histoire de la mathématisation du hasard. Discuté depuis le 14$^{\text{ème}}$ siècle, ce problème concernait le partage équitable des gains d'un jeu de hasard interrompu : deux joueurs décident d'arrêter de jouer avant la fin du jeu et souhaitent partager les gains de manière équitable en s'appuyant sur les chances que chacun avait de gagner une fois à ce point.

Blaise Pascal (1623 - 1662) résout ce problème dans son *Traité du triangle arithmétique* de 1654. Il étudie pour cela les propriétés des coefficients binomiaux, et en donne une présentation commode en tableau (maintenant connu sous le nom de *triangle de Pascal*). C'est aussi dans cet ouvrage qu'apparait pour la première fois le principe du raisonnement par récurrence.

Le talent de Pascal, nourri de son expérience de géomètre et de juriste, a été de voir se dessiner la possibilité d'une mathématique du hasard, proprement un oxymore à son époque, et d'avoir approché ainsi la question des décisions équitables et justes, fondamentalement d'ordre juridique. Ces travaux donneront naissance au cours du 18$^{\text{ème}}$ siècle au calcul des probabilités, et influenceront fortement les théories économiques modernes et les sciences sociales.

Blaise Pascal (1623 - 1662).

1.3 Rédaction d'un calcul de probabilité

Le calcul de la probabilité d'un événement A comporte généralement quatre étapes[1] :

- si cela n'a pas été fait dans l'énoncé, introduire des événements « de base » issus de l'expérience décrite, c'est-à-dire des événements dont la réalisation est « simple à énoncer » et qui permettront de décrire tous les autres événements. On choisira pour cela des notations judicieuses (par exemple en numérotant ces événements s'ils sont liés à la répétition d'une même expérience) ;
- décrire à l'aide d'une phrase l'événement A : « A est réalisé si, et seulement si, ... ». Il s'agit d'obtenir une condition nécessaire et suffisante de réalisation de l'événement A faisant intervenir les événements de base ;
- donner une traduction ensembliste de cette phrase, en exprimant A à l'aide d'unions, d'intersections ou de complémentaires des événements de base ;
- calculer la probabilité $P(A)$ en s'appuyant sur l'expression ensembliste de A, à l'aide des règles de calcul de probabilité que nous allons donner dans la suite de ce chapitre.

[1]Les situations étant très variées dans la pratique, on pourra être amené à s'écarter légèrement de la voie tracée ici.

1.4 Premières règles de calcul d'une probabilité

Propriété 2 (d'une probabilité)

Soit (Ω, P) un espace probabilisé fini, A et B deux événements. Alors :

(1) $P(\Omega) = 1$ et $P(\varnothing) = 0$;

(2) $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$;

(3) $P(B \setminus A) = P(B) - P(A \cap B)$;

(4) si $A \subset B$, alors $P(A) \leq P(B)$ (*croissance de la probabilité*).

Propriété 3 (Probabilité d'une réunion)

Soit (Ω, P) un espace probabilisé fini.

(1) Pour tout couple (A, B) d'événements de Ω :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

(2) Pour tout k-uplet $(A_1, A_2, \ldots, A_k)$ d'événements de Ω :

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{k} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{k} P(A_i) \quad (\textit{sous-additivité}).$$

Si de plus les événements $A_1, \ldots, A_k$ sont deux à deux incompatibles, alors il y a égalité :

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{k} A_i\right) = \sum_{i=1}^{k} P(A_i).$$

Exercice 3. Soient A, B, C des événements. Calculer $P(A \cup B \cup C)$.

Pour aller plus loin.

On peut montrer par récurrence la *formule du crible de Poincaré* suivante (hors programme) :

$$P(A_1 \cup \cdots \cup A_k) = \sum_{j=1}^{k} \left((-1)^{j-1} \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_j \leq k} \mathrm{Card}(E_{i_1} \cap \cdots \cap E_{i_j}) \right).$$

1.5 Construction de probabilités

Propriété 4 (Construction d'une probabilité)

Soient $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$ un univers fini et $p_1, \dots, p_n$ des réels. Il y a équivalence entre :

(1) il existe une probabilité P sur Ω telle que : $\forall i \in [\![1, n]\!],\ P(\{\omega_i\}) = p_i$;

(2) les réels $p_1, \dots, p_n$ sont positifs et $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$.

Une telle probabilité P est alors unique, et satisfait pour tout événement $A \in \mathscr{P}(\Omega)$:

$$P(A) = \sum_{\substack{i \in [\![1,n]\!] \\ \text{tel que } \omega_i \in A}} p_i.$$

Exemples.

- Pour $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$, il existe une unique probabilité P telle que :

  $$\forall i \in [\![1, n]\!],\ P(\{\omega_i\}) = \frac{1}{\mathrm{Card}(\Omega)}.$$

  Elle satisfait pour tout événement A :

  $$P(A) = \sum_{\substack{i \in [\![1,n]\!] \\ \text{tel que } \omega_i \in A}} P(\{\omega_i\}) = \sum_{\substack{i \in [\![1,n]\!] \\ \text{tel que } \omega_i \in A}} \frac{1}{\mathrm{Card}(\Omega)} = \frac{\mathrm{Card}(A)}{\mathrm{Card}(\Omega)}.$$

  Il s'agit de la probabilité uniforme.

- Pour $\Omega = [\![1, 6]\!]$, il existe une unique probabilité P permettant de simuler un lancer d'un dé qui tombe sur 2, 4 ou 6 avec probabilité $\frac{1}{6}$, sur 1 ou 3 avec probabilité $\frac{1}{10}$ et sur 5 avec probabilité $\frac{3}{10}$.

2 Probabilités conditionnelles

Dans toute la suite, (Ω, P) désigne un espace probabilisé fini.

2.1 Définition

Définition.

Soient A et B deux événements, avec $P(B) \neq 0$.

On appelle *probabilité conditionnelle de A sachant B* (c'est-à-dire sachant que B est réalisé), et on note $P_B(A)$, le quotient :

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Mise en garde.

On peut aussi rencontrer la notation $P(A \mid B)$ pour la probabilité conditionnelle de A sachant B.

Bien qu'elle figure dans le programme officiel, elle est trompeuse et peut laisser penser qu'il existe un événement $(A \mid B)$, qui serait « A sachant B ». Un tel « événement conditionnel » n'existe pas, et ce qu'on aurait éventuellement envie d'appeler ainsi correspond bien souvent à $A \cap B$.

Propriété 5

Pour tout événement B tel que $P(B) \neq 0$, l'application

$$P_B : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathscr{P}(\Omega) & \to & [0,1] \\ A & \mapsto & P_B(A) \end{array} \right.$$

est une probabilité sur Ω, appelée *probabilité conditionnelle à B*.

Remarque. En particulier, toutes les règles de calcul sur les probabilités s'appliquent aussi pour P_B. Par exemple, $P_B(\overline{A}) = 1 - P_B(A)$.

2.2 Formule des probabilités composées

Par définition d'une probabilité conditionnelle, $P(A \cap B) = P(B)P_B(A)$. Ce résultat se généralise de la manière suivante :

Propriété 6 (*Formule des probabilités composées*)

Soient $k \geq 2$ et $A_1, \dots, A_k$ des événements tels que $P(A_1 \cap \dots \cap A_{k-1}) \neq 0$. Alors[a] :

$$P(A_1 \cap \dots \cap A_k) = P(A_1)P_{A_1}(A_2)P_{A_1 \cap A_2}(A_3) \dots P_{A_1 \cap \dots \cap A_{k-1}}(A_k).$$

[a] Toutes les probabilités conditionnelles sont bien définies par croissance de la probabilité, puisque $P(A_1 \cap \dots \cap A_{k-1}) > 0$.

Méthode. Quand utilise-t-on la formule des probabilités composées ?

Elle s'utilise lorsqu'on modélise des expériences successives telles que le résultat d'une expérience influe sur la suivante.

Exercice 4. On effectue des tirages sans remise dans une urne qui contient 2 boules rouges et $n-2$ boules vertes. Déterminer pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$, la probabilité de l'événement A_k : « la première boule rouge sort au k-ème tirage ».

2.3 Formules des probabilités totales

Définition.

On appelle *système complet d'événements* tout recouvrement de Ω, c'est-à-dire tout ensemble $\{A_1, \dots, A_k\}$ d'événements de Ω tel que :

- $A_1, \dots, A_k$ sont deux à deux incompatibles ;
- $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{k} A_i = \Omega$.

Exemples.

- Pour tout événement $A \subset \Omega$, $\{A, \overline{A}\}$ est un système complet d'événements.
- $\{\{\omega\}, \omega \in \Omega\}$ est un système complet d'événements.

Propriété 7

Si $\{A_1, \dots, A_k\}$ est un système complet d'événements, alors : $\displaystyle\sum_{i=1}^{k} P(A_i) = 1$.

Théorème 8 (*Formules des probabilités totales*)

Soit $\{A_1, \dots, A_k\}$ un système complet d'événements. Alors pour tout événement B :

$$P(B) = \sum_{i=1}^{k} P(A_i \cap B).$$

Si de plus, $P(A_i) \neq 0$ pour tout $i \in [\![1, k]\!]$, alors :

$$P(B) = \sum_{i=1}^{k} P(A_i) P_{A_i}(B).$$

Remarques.

- Il y a donc deux formules des probabilités totales, et on choisira l'une ou l'autre suivant que l'on connaisse $P(A_i \cap B)$ ou $P_{A_i}(B)$.
- Dans le cas particulier du système complet d'événements $\{A, \overline{A}\}$ où $0 < P(A) < 1$, les formules des probabilités totales deviennent :

$$\forall B \in \mathscr{P}(\Omega), \quad P(B) = P(A \cap B) + P(\overline{A} \cap B) = P(A)P_A(B) + P(\overline{A})P_{\overline{A}}(B).$$

Méthode. Quand utilise-t-on la formule des probabilités totales ?

On l'utilise lorsqu'une expérience aléatoire se déroule en plusieurs étapes : elle permet de raisonner par disjonction des cas, suivant le résultat de l'étape précédente, pour déterminer la probabilité à l'étape suivante.

Exercice 5. Le fonctionnement au cours du temps d'un appareil possédant une maintenance obéit aux règles suivantes :

- s'il fonctionne à la date $n-1$, il a la probabilité a de toujours fonctionner à la date n,
- s'il est en panne à la date $n-1$, il a la probabilité b d'être encore en panne à la date n,

où (a, b) est un couple de réels de $]0, 1[$. On suppose que l'appareil est en état de marche à la date 0. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note M_n l'événement « l'appareil est en état de marche à la date n » et p_n la probabilité de M_n.

1. Exprimer p_{n+1} en fonction de p_n.
2. En déduire p_n en fonction de n. Quelle est la limite de la suite (p_n) ?

2.4 Formule de Bayes

Propriété 9 (*Formule de Bayes* (1702 - 1761))

(1) Si A et B sont deux événements de probabilités non nulles, alors :

$$P_B(A) = \frac{P(A)P_A(B)}{P(B)}.$$

(2) Si $\{A_1, \dots, A_k\}$ est un système complet d'événements, alors pour tout événement B de probabilité non nul et pour tout $j \in [\![1, k]\!]$:

$$P_B(A_j) = \frac{P(A_j)P_{A_j}(B)}{P(B)} \underset{\forall i \in [\![1,k]\!],\ P(A_i) \neq 0}{=} \frac{P(A_j)P_{A_j}(B)}{\displaystyle\sum_{i=1}^{k} P(A_i)P_{A_i}(B)}.$$

Méthode. Quand applique-t-on la formule de Bayes ?

Elle s'utilise pour des expériences aléatoires se déroulant en deux étapes. Elle permet de calculer la probabilité $P_B(A_j)$, c'est-à-dire la probabilité de A_j (étape 1) sachant B (étape 2). On l'appelle parfois la formule des causes puisqu'elle donne la probabilité d'une cause (étape 1) sachant la conséquence (étape 2).

Exercice 6. Un questionnaire à choix multiples propose m réponses pour chaque question. Soit p la probabilité qu'un étudiant connaisse la bonne réponse à une question donnée. S'il ignore la réponse, il choisit au hasard l'une des réponses proposées.

Quelle est pour le correcteur la probabilité qu'un étudiant connaisse vraiment la bonne réponse lorsqu'il l'a donnée ?

3 Indépendance

Définition.

Deux événements A et B d'un espace probabilisé fini (Ω, P) sont dits *indépendants* si :

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B).$$

Mise en garde.

Attention à ne pas confondre incompatibilité et indépendance :

- l'incompatibilité est une notion intrinsèque aux événements et ne dépend pas de la probabilité P : A et B sont incompatibles si $A \cap B = \emptyset$.
- l'indépendance est une notion qui ne dépend pas de l'univers Ω, mais seulement de la probabilité P qu'on met dessus.

Propriété 10

Soient A et B des événements d'un espace probabilisé fini (Ω, P).

(1) Supposons $P(A) \neq 0$. Alors A et B sont indépendants si, et seulement si, $P_A(B) = P(B)$.

(2) Si A et B sont indépendants, alors A et $\overline{B}$ sont indépendants.

Remarque. La plupart du temps, l'indépendance se déduit de la situation. Deux événements sont indépendants lorsque la réalisation de l'un ne donne pas d'information sur la réalisation de l'autre. Typiquement lors de plusieurs lancers d'une pièce ou d'un dé, ou lors de tirages successifs **avec remise**.

Définition.

Des événements $A_1, \dots, A_k$ d'un espace probabilisé fini (Ω, P) sont dits :

- *deux à deux indépendants* si pour tout couple (i, j) d'éléments distincts de $[\![1, k]\!]$:

$$P\left(A_i \cap A_j\right) = P(A_i)P(A_j).$$

- *mutuellement indépendants* si, pour tout $I \subset [\![1, k]\!]$:

$$P\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) = \prod_{i \in I} P(A_i).$$

Mise en garde.

Si des événements sont mutuellement indépendants, **alors** ils sont deux à deux indépendants. Attention, la réciproque est fausse en général. Ainsi :

$$\boxed{\text{Indépendance mutuelle}} \quad \begin{matrix} \Longrightarrow \\ \not\Longleftarrow \end{matrix} \quad \boxed{\text{Indépendance deux à deux}}$$

Exercice 7. On lance deux dés équilibrés. Notons A : « le numéro du premier dé est pair », B : « le numéro du second dé est pair » et C « la somme des deux dés est paire ». Montrer que A, B et C sont deux à deux indépendants. Sont-ils mutuellement indépendants ?

Propriété 11

Soient $A_1, \ldots, A_k$ des événements d'un espace probabilisé fini (Ω, P).
Considérons $B_1, \ldots, B_k$ des événements tels que $B_i = A_i$ ou $B_i = \overline{A_i}$ pour tout $i \in [\![1, k]\!]$. Alors :

$$\begin{array}{c} A_1, \ldots, A_k \text{ mutuellement indépendants} \\ \text{(resp. 2 à 2 indépendants)} \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{c} B_1, \ldots, B_k \text{ mutuellement indépendants} \\ \text{(resp. 2 à 2 indépendants)} \end{array}$$

Liens utiles.

Le problème de Monty Hall ou les probabilités changent de porte, Voyages au pays des maths, ARTE.