Chapitre 29

Représentation matricielle en algèbre linéaire

Compétences attendues.

✓ Écrire la matrice d'une application linéaire dans une base.

✓ Calculer le rang d'une matrice, d'un endomorphisme ou d'une famille de vecteurs.

✓ Écrire une matrice de passage, et l'utiliser dans les formules de changement de bases.

✓ Déterminer sur des exemples si deux matrices sont semblables ou non.

Anthony Mansuy - Professeur en MP2I au Lycée Roosevelt (Reims)
Page personnelle : `anthony-mansuy.fr/`
E-mail : `mansuy.anthony@hotmail.fr`

1 Matrice d'une application linéaire dans des bases

Dans tout le chapitre, E et F désigneront des espaces vectoriels **de dimension finie** sur un corps $\mathbb{K}$.

1.1 Matrice d'une famille de vecteurs dans une base

Définition.

Soit $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E.

- Soit $u \in E$, et $(m_1, \dots, m_n)$ les coordonnées de u dans la base $\mathscr{B}$, c'est-à-dire l'unique n-uplet de scalaires tel que :
$$u = m_1 \cdot e_1 + \cdots + m_n \cdot e_n.$$
On appelle *matrice des coordonnées de u dans la base $\mathscr{B}$* la matrice colonne de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, notée $M_{\mathscr{B}}(u)$, de ces coefficients dans la base $\mathscr{B}$:
$$M_{\mathscr{B}}(u) = \begin{array}{cc} u & \\ \begin{pmatrix} m_1 \\ \vdots \\ m_n \end{pmatrix} & \begin{array}{c} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{array} \end{array}.$$

- Soit $\mathscr{F} = (u_1, \dots, u_p) \in E^p$, une famille de vecteurs de E.

  On appelle *matrice de la famille $(u_1, \dots, u_p)$ dans la base $\mathscr{B}$*, et on note $M_{\mathscr{B}}(\mathscr{F}) = M_{\mathscr{B}}(u_1, \dots, u_p)$, la matrice de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ dont la j-ème colonne est $M_{\mathscr{B}}(u_j)$:
$$M_{\mathscr{B}}(\mathscr{F}) = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccccc} u_1 & \cdots & u_j & \cdots & u_p \end{array} & \\ \begin{pmatrix} m_{1,1} & \cdots & m_{1,j} & \cdots & m_{1,p} \\ m_{2,1} & \cdots & m_{2,j} & \cdots & m_{2,p} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ m_{n,1} & \cdots & m_{n,j} & \cdots & m_{n,p} \end{pmatrix} & \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{array} \end{array} \quad \text{où } u_j = \sum_{i=1}^{n} m_{i,j} \cdot e_i \text{ pour tout } 1 \leq j \leq p.$$

Exemples.

- Si $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est une base de E, $M_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}) = I_n$.
- Pour $E = \mathbb{R}^3$, $\mathscr{B}$ sa base canonique, et $u_1 = (1, 2, 3)$, $u_2 = (2, 0, 1) \in E$, on obtient :
$$M_{\mathscr{B}}(u_1, u_2) = \begin{array}{cc} \begin{array}{cc} u_1 & u_2 \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} (1,0,0) \\ (0,1,0) \\ (0,0,1) \end{array} \end{array}.$$

Exercice 1. Soit $\mathscr{B} = ((0, 1, 1), (1, 0, 1), (1, 1, 0))$ et $u = (2, 0, 4)$. Déterminer $M_{\mathscr{B}}(u)$.

Propriété 1

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n et $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E. L'application :
$$\Phi_{\mathscr{B}} : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \to & \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \\ x & \mapsto & M_{\mathscr{B}}(x) \end{array} \right.$$
est un isomorphisme de $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

1.2 Matrice d'une application linéaire dans des bases

Définition.

Soient E et F deux espaces vectoriels de dimensions finies p et n, $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_p)$ une base de E, $\mathscr{C} = (f_1, \dots, f_n)$ une base de F et $f \in \mathscr{L}(E, F)$.
On appelle *matrice de f dans les bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$*, notée $M_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f)$, la matrice $(a_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq p \\ 1\leq j\leq n}} \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ où pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, la j-ème colonne contient les coordonnées de $f(e_j)$ dans la base $\mathscr{C}$:

$$M_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} f(e_1) & \dots & f(e_j) & \dots & f(e_p) \end{array} \\ \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,j} & \dots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & \dots & a_{2,j} & \dots & a_{2,p} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,j} & \dots & a_{n,p} \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{array} \quad \text{où} \quad f(e_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} f_i.$$

Remarques.

- $\dim(E)$ = nombre de colonnes de la matrice, $\dim(F)$ = nombre de lignes de la matrice.
- Par définition, $M_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f) = M_{\mathscr{C}}(f(e_1), \dots, f(e_n))$.

Exercice 2. Écrire la matrice de $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) & \mapsto & (x + 2y - z, y - 3z) \end{array} \right.$ dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^3$ et de $\mathbb{R}^2$.

Cas d'un endomorphisme. Lorsque $E = F$, on prend en général la même base $\mathscr{B}$ au départ et à l'arrivée, et pour tout $f \in \mathscr{L}(E)$, on note plus simplement $M_{\mathscr{B}}(f) = M_{\mathscr{B},\mathscr{B}}(f)$ la matrice de f dans la base $\mathscr{B}$.

Exemple. Pour toute base $\mathscr{B}$ de E, $M_{\mathscr{B}}(\mathrm{id}_E) = I_n$.

Exercice 3. Écrire la matrice de l'endomorphisme $\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \to & \mathbb{R}_2[X] \\ P & \mapsto & (X^2 - 1)P' - 2XP \end{array} \right.$:

- dans la base canonique $\mathscr{C} = (1, X, X^2)$ de $\mathbb{R}_2[X]$;
- dans la base $\mathscr{B} = ((X + 1)^2, X^2 - 1, (X - 1)^2)$ de $\mathbb{R}_2[X]$.

Mise en garde.

Si on change les bases, on change la matrice de l'application linéaire.

Cas d'une forme linéaire. Soit $\varphi \in \mathscr{L}(E, \mathbb{K})$ une forme linéaire, $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E. On prend usuellement (1) pour base de $\mathbb{K}$. En notant $a_j = \varphi(e_j)$ pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, on obtient :

$$M_{\mathscr{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_n \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{1,n}(\mathbb{K}).$$

1.3 Compatibilité avec les opérations

Propriété 2 (Coordonnées de l'image d'un vecteur)

Supposons E et F de dimension finie, et considérons $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$ des bases respectives de E et F. Soient $f \in \mathscr{L}(E, F)$ et $x \in E$. Notons :

- A la matrice de f dans les bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$;
- X la matrice colonne des coordonnées de x dans $\mathscr{B}$;
- Y la matrice colonne des coordonnées de $y = f(x)$ dans la base $\mathscr{C}$.

Alors :

$$Y = AX.$$

Propriété 3

Soient E et F des espaces vectoriels de dimension finie de bases respectives $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$.
Pour tous $f, g \in \mathscr{L}(E,F)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$:

$$M_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(\lambda \cdot f + g) = \lambda \cdot M_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f) + M_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(g).$$

Corollaire 4

Soient E et F de dimensions finies n et p, $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$ des bases de E et F.

(1) L'application $\Phi_{\mathscr{B},\mathscr{C}} : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathscr{L}(E,F) & \to & \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \\ f & \mapsto & M_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f) \end{array} \right.$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

(2) $\mathscr{L}(E,F)$ est de dimension finie et :

$$\dim(\mathscr{L}(E,F)) = \dim(E) \times \dim(F).$$

Propriété 5

Soient E, F et G des espaces vectoriels de dimension finie, de bases respectives $\mathscr{B}_E$, $\mathscr{B}_F$ et $\mathscr{B}_G$.
Si $f \in \mathscr{L}(E,F)$ et $g \in \mathscr{L}(F,G)$, alors :

$$M_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}_G}(g \circ f) = M_{\mathscr{B}_F,\mathscr{B}_G}(g) \times M_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}_F}(f).$$

Corollaire 6

Soient E un espace vectoriel de dimension finie n, et $\mathscr{B}$ une base de E.
L'application $\Phi_{\mathscr{B},\mathscr{B}} : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathscr{L}(E) & \to & \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \\ f & \mapsto & M_{\mathscr{B}}(f) \end{array} \right.$ est un isomorphisme d'anneaux.

Propriété 7

Soient E et F deux espaces vectoriels de même dimension n munis respectivement des bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$. Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$. Alors :

$$f \text{ est un isomorphisme} \quad \Leftrightarrow \quad M_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f) \text{ est inversible.}$$

Et dans ce cas : $\quad (M_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f))^{-1} = M_{\mathscr{C},\mathscr{B}}\left(f^{-1}\right).$

Corollaire 8

Soient E un espace de dimension n, $\mathscr{B}$ une base de E. Considérons $\mathscr{F} = (u_1, \dots, u_n)$ une famille de n vecteurs de E. Alors :

$$\mathscr{F} = (u_1, \dots, u_n) \text{ est une base de } E \quad \Leftrightarrow \quad M_{\mathscr{B}}(\mathscr{F}) \text{ est inversible.}$$

Exercice 4. Soient $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{K}$ des scalaires deux à deux distincts, $\mathscr{B} = (L_0, \dots, L_n)$ la base de $\mathbb{K}_n[X]$ formée des polynômes de Lagrange associés à ces scalaires.

1. Écrire la matrice de $\mathscr{F} = (1, X, \dots, X^n)$ dans la base $\mathscr{B}$.

2. En déduire que la matrice de Vandermonde :

$$\begin{pmatrix} 1 & a_0 & \dots & a_0^n \\ 1 & a_1 & \dots & a_1^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n & \dots & a_n^n \end{pmatrix}$$

est inversible.

2 Application linéaire canoniquement associée à une matrice

2.1 Définitions

Définition.

Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On appelle *application linéaire canoniquement associée à A* l'application :

$$\varphi_A : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \\ X & \longmapsto & A \cdot X \end{array} \right. .$$

Propriété 9

Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. Notons $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$ les bases canoniques de $\mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ et $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ respectivement. Alors :

$$M_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(\varphi_A) = A.$$

Définition.

Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Notons φ_A l'application linéaire canoniquement associée à A.

- On appelle *noyau de A*, et on note $\mathrm{Ker}(A)$, le noyau de φ_A. Ainsi :

$$\mathrm{Ker}(A) = \{X \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K}) \mid A \cdot X = 0_{n,1}\}.$$

- On appelle *image de A*, en note $\mathrm{Im}(A)$, l'image de φ_A. Ainsi :

$$\mathrm{Im}(A) = \{A \cdot X,\ X \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K})\} = \{Y \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \mid \exists X \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K}),\ Y = A \cdot X\}.$$

Exercice 5. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 0 \\ 4 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. Déterminer $\mathrm{Ker}(A)$ et $\mathrm{Im}(A)$.

2.2 Rang d'une matrice

Définition.

Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On appelle *rang de A*, et on note $\mathrm{rg}(A)$, la dimension de $\mathrm{Im}(A)$.

Propriété 10

Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. Notons $C_1, \dots, C_p \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ les vecteurs colonnes de A. Alors :

(1) $\mathrm{rg}(A) \leq \min(n, p)$;

(2) $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(C_1, \dots, C_p)$;

(3) Théorème du rang : $p = \dim(\mathrm{Ker}(A)) + \mathrm{rg}(A)$.

Exemples.

- La matrice
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 1 & 2 & \dots & n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix}$$
est de rang 1 : en effet, toutes ses colonnes sont proportionnelles.
- Soient $n, p \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq r \leq \min(n,p)$. On définit la matrice $J_{r,n,p} \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ par :
$$J_{r,n,p} = \begin{pmatrix} I_r & 0_{r,p-r} \\ 0_{n-r,r} & 0_{n-r,p-r} \end{pmatrix}.$$
Si on note $(e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, alors $\text{rg}(J_{r,n,p}) = \text{rg}(e_1, \dots, e_r) = r$.

Propriété 11

Soient $x_1, \dots, x_p$ des vecteurs de E, et $\mathscr{B}$ une base de E.
Alors $\text{rg}(x_1, \dots, x_p) = \text{rg}(M_{\mathscr{B}}(x_1, \dots, x_p))$.

Propriété 12

Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$, et soient $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$ des bases respectives de E et F.
Alors $\text{rg}(f) = \text{rg}(M_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f))$.

2.3 Inversibilité d'une matrice

Propriété 13

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Notons $(C_1, \dots, C_n)$ la famille de ses vecteurs colonne. Alors :

$$\begin{aligned} A \text{ inversible} \quad &\Leftrightarrow \quad \text{Ker}(A) = \{0_{n,1}\} \\ &\Leftrightarrow \quad \forall X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}),\ \big(AX = 0_{n,1} \ \Rightarrow\ X = 0_{n,1}\big) \\ &\Leftrightarrow \quad \text{Im}(A) = \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \\ &\Leftrightarrow \quad \text{rg}(A) = n \\ &\Leftrightarrow \quad (C_1, \dots, C_n) \text{ base de } \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}). \end{aligned}$$

Propriété 14

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Il y a équivalence entre :

(1) A est inversible ;

(2) A est inversible à gauche : il existe $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $BA = I_n$;

(3) A est inversible à droite : il existe $C \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $AC = I_n$.

2.4 Calcul pratique du rang

Propriété 15 (Conservation de l'image et du noyau)

Soient $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ et $Q \in \mathrm{GL}_p(\mathbb{K})$. Alors :

- $\mathrm{Ker}(PA) = \mathrm{Ker}(A)$;
- $\mathrm{Im}(AQ) = \mathrm{Im}(A)$.

En particulier :

$$\mathrm{rg}(PA) = \mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(AQ).$$

Corollaire 16

(1) Les opérations élémentaires sur les lignes conservent le noyau.

(2) Les opérations élémentaires sur les colonnes conservent l'image.

(3) Les opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes conservent le rang.

Propriété 17

Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

(1) Si A est une matrice échelonnée par lignes, alors son rang est égal au nombre de ses pivots, soit encore au nombre de ses lignes non nulles.

(2) Soit $0 \leq r \leq \min(n, p)$. Alors :

$$\mathrm{rg}(A) = r \quad \Leftrightarrow \quad \exists (P, Q) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \times \mathrm{GL}_p(\mathbb{K}),\ PAQ = J_{r,n,p}.$$

Méthode. Comment calculer le rang d'une matrice ?

Pour calculer le rang d'une matrice A, on échelonne la matrice ***par opérations sur les lignes****. Le rang de A est alors le nombre de pivots de la matrice échelonnée obtenue après application de l'algorithme de Gauss.*

Exercice 6. On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 0 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calculer $r = \mathrm{rg}(A)$ et déterminer P, Q inversibles telles que $PAQ = J_{r,4,5}$.

Méthode. Comment calculer le rang d'une famille de vecteurs ?

Pour déterminer le rang d'une famille $\mathscr{F} = (u_1, \ldots, u_p)$ *de vecteurs d'un espace vectoriel* E *de dimension finie, et pour extraire de* $\mathscr{F}$ *une base de* $\mathrm{Vect}(\mathscr{F})$*, on procèdera ainsi :*

(i) on écrit la matrice de $\mathscr{F}$ *dans une base* $\mathscr{B}$ *de* E *;*

(ii) on se ramène à une matrice échelonnée par ***opérations élémentaires sur les lignes*** *:*

$$\begin{pmatrix} m'_{1,j_1} & \cdots & & & & \\ 0 & & m'_{2,j_2} & \cdots & & \\ & & 0 & & & \\ & & & & m'_{r,j_r} & \cdots \\ & & & & 0 & 0 \\ 0 & & & & & 0 \end{pmatrix};$$

(iii) le rang de $\mathscr{F}$ *est égal à* r*, le nombre de pivots non nuls dans la matrice échelonnée par lignes ;*

(iv) la sous-famille $(u_{j_1}, \ldots, u_{j_r})$*, dont les vecteurs correspondent aux colonnes des pivots (inconnues principales), est libre de cardinal* $r = \mathrm{rg}(\mathscr{F})$*.*

Exercice 7. Calculer le rang de la famille

$$\mathscr{F} = (X^2 - 2X + 3, X^3 + 3X - 4, 2X^3 + X^2 + 2X - 2, 3X^3 + 3X^2 - X + 3)$$

de $\mathbb{R}_3[X]$ et déterminer une base de $\mathrm{Vect}(\mathscr{F})$.

Propriété 18

Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Alors $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A^\top)$.

Corollaire 19

Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Notons $L_1, \ldots, L_n \in \mathscr{M}_{1,p}(\mathbb{K})$ les vecteurs lignes de A. Alors :

$$\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(L_1, \ldots, L_n).$$

En particulier si $n = p$:

$$A \text{ inversible} \quad \Leftrightarrow \quad (L_1, \ldots, L_n) \text{ base de } \mathscr{M}_{1,n}(\mathbb{K}).$$

Exercice 8. Soient $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{K}$. Montrer que la matrice de Vandermonde

$$V(a_0, \ldots, a_n) = \begin{pmatrix} 1 & a_0 & \ldots & a_0^n \\ 1 & a_1 & \ldots & a_1^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n & \ldots & a_n^n \end{pmatrix}$$

est inversible si, et seulement si, les scalaires $a_0, \ldots, a_n$ sont deux à deux distincts.

2.5 Résolution de systèmes linéaires

Considérons un système linéaire de n équations à p inconnues écrit sous forme matricielle $AX = B$ avec $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $X \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ l'inconnue, et $B \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ le vecteur colonne des seconds membres. On note $(A \mid B)$ la *matrice augmentée* du système, c'est-à-dire la matrice obtenue en ajoutant à la matrice A la matrice B comme nouvelle et dernière colonne.

Définition.

On appelle *rang du système linéaire* $AX = B$ le rang de la matrice A de ses coefficients.

Propriété 20 (Ensemble des solutions d'un système linéaire homogène)

L'ensemble des solutions du système homogène $AX = 0_{n,1}$ est égal au sous-espace vectoriel $\mathrm{Ker}(A)$ de $\mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K})$, de dimension $p - \mathrm{rg}(A)$.

Propriété 21 (Ensemble des solutions d'un système linéaire avec second membre)

Soit $AX = B$ un système linéaire.

(1) Ce système est compatible si, et seulement si, $B \in \mathrm{Im}(A)$, soit encore $\mathrm{rg}(A \mid B) = \mathrm{rg}(A)$.

(2) Si $B \in \mathrm{Im}(A)$, considérons X_0 une solution du système : $AX_0 = B$.

L'ensemble des solutions du système linéaire $AX = B$ est le sous-espace affine de $\mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ passant par X_0 et dirigé par $\mathrm{Ker}(A)$, de dimension $p - \mathrm{rg}(A)$.

Propriété 22

Toute opération élémentaire **sur les lignes** transforme un système linéaire en un système linéaire de même rang et qui lui est équivalent.

Remarque. Au **Chapitre 5. Systèmes linéaires.**, nous avions défini le rang d'un système linéaire comme étant le nombre de pivots après échelonnement de la matrice par l'algorithme du pivot de Gauss. Nous obtenons ici que ce rang est unique, et ne dépend pas des opérations élémentaires sur les lignes effectuées pour échelonner le système.

Définition.

Soit $AX = B$ un système linéaire **carré**, c'est-à-dire pour lequel A est une matrice carrée de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
On dit que le système $AX = B$ est *de Cramer* s'il possède une unique solution.

Propriété 23

Soient $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et $B \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.
Alors $AX = B$ est un système de Cramer si, et seulement si, A est inversible. Son unique solution est alors $X = A^{-1}B$.

2.6 Rang et matrices extraites

Définition.

Soit $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq p}} \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
On appelle *matrice extraite de* A toute matrice de la forme $(a_{i,j})_{\substack{i\in I\\j\in J}}$ avec $I \subset [\![1,n]\!]$ et $J \subset [\![1,p]\!]$, c'est-à-dire toute matrice obtenue à partir de A par suppression de certaines lignes et certaines colonnes.

Propriété 24

Soient $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et B une matrice extraite de A. Alors $\mathrm{rg}(B) \leq \mathrm{rg}(A)$.

Exemple. $\mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix}1&1&2&0\\2&3&1&0\\1&0&3&1\\3&0&0&2\end{pmatrix}\right) \geq 3$ car la matrice extraite $\begin{pmatrix}3&1&0\\0&3&1\\0&0&2\end{pmatrix}$ est inversible.

Propriété 25

Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Le rang de A est la taille maximale d'une matrice inversible extraite de A.

3 Changement de bases

On a associé à $f \in \mathscr{L}(E,F)$ sa matrice $M_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f)$ dans des bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$ de E et F respectivement. Mais cette matrice dépend du choix de $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$, et il existe donc plusieurs matrices qui représentent la même application linéaire. Comment passer de l'une à l'autre, et quelles sont les propriétés partagées par ces matrices ?

3.1 Matrice de passage

Définition.

Soient $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ deux bases de E.
On appelle *matrice de passage de la base* $\mathscr{B}$ *à la base* $\mathscr{B}'$ la matrice $P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}$ de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ dont les colonnes sont formées des coordonnées des vecteurs de $\mathscr{B}'$ dans la base $\mathscr{B}$.
Plus précisément, si on note $\mathscr{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$, $\mathscr{B}' = (e'_1, e'_2, \dots, e'_n)$ et $P = (p_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq n}}$, alors :

$$P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} e'_1 & e'_2 & \cdots & e'_j & \cdots & e'_n \end{array} \\ \begin{pmatrix} p_{1,1} & p_{1,2} & \cdots & p_{1,j} & \cdots & p_{1,n} \\ p_{2,1} & p_{2,2} & \cdots & p_{2,j} & \cdots & p_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ p_{n,1} & p_{n,2} & \cdots & p_{n,j} & \cdots & p_{n,n} \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{array} \quad \text{où} \quad e'_j = \sum_{i=1}^{n} p_{i,j} \cdot e_i \quad \text{pour tout } 1 \leq j \leq n.$$

Remarque. Par définition, $P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'} = M_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}(\mathrm{id}_E)$ puisque :

$$M_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}(\mathrm{id}_E) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} \mathrm{id}(e'_1) & \cdots & \mathrm{id}(e'_j) & \cdots & \mathrm{id}(e'_n) \end{array} \\ \begin{pmatrix} p_{1,1} & \cdots & p_{1,j} & \cdots & p_{1,n} \\ p_{2,1} & \cdots & p_{2,j} & \cdots & p_{2,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ p_{n,1} & \cdots & p_{n,j} & \cdots & p_{n,n} \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{array}.$$

Propriété 26

(1) Soient $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ deux bases de E. Alors $P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}$ est inversible, d'inverse :

$$(P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'})^{-1} = P_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}.$$

(2) Soient $\mathscr{B}, \mathscr{B}'$ et $\mathscr{B}''$ des bases de E. Alors $P_{\mathscr{B},\mathscr{B}''} = P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'} P_{\mathscr{B}',\mathscr{B}''}$.

Exercice 9. Montrer que $\mathscr{B} = (-X^2+3X+3, X, -X^2+3X+4)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$, et déterminer $P_{\mathscr{B}_{\text{can}},\mathscr{B}}$ et $P_{\mathscr{B},\mathscr{B}_{\text{can}}}$ où $\mathscr{B}_{\text{can}}$ désigne la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.

3.2 Formules de changement de base

Propriété 27

Supposons E de dimension finie, et soient $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ deux bases de E. Soit $x \in E$. Notons :

- X la matrice de x dans la base $\mathscr{B}$;
- X' la matrice de x dans la base $\mathscr{B}'$;
- P la matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$.

Alors :

$$X = PX'.$$

Exercice 10. Décomposer $R = 1 + 3X - 2X^2$ dans la base $\mathscr{B} = (-X^2 + 3X + 3, X, -X^2 + 3X + 4)$.

Théorème 28 (*de changement de bases*)

Soient $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ deux bases de E, et $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ deux bases de F. Soit $f \in \mathscr{L}(E)$. Notons :

- A la matrice de f dans les bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$ et A' celle de f dans les bases $\mathscr{B}'$ et $\mathscr{C}'$;
- P la matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$ et Q la matrice de passage de $\mathscr{C}$ à $\mathscr{C}'$.

Alors :

$$A' = Q^{-1}AP.$$

Théorème 29 (*de changement de bases pour les endomorphismes*)

Soient $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ deux bases de E. Soit $f \in \mathscr{L}(E)$. Notons :

- A la matrice de f dans la base $\mathscr{B}$;
- A' la matrice de f dans la base $\mathscr{B}'$;
- P la matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$.

Alors :

$$A' = P^{-1}AP.$$

Exercice 11. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ défini par $f(P) = P + P'$. Déterminer la matrice de f dans la base canonique $\mathscr{B}_{\text{can}}$ de $\mathbb{R}_2[X]$, puis dans la base $\mathscr{B} = (-X^2 + 3X + 3, X, -X^2 + 3X + 4)$.

3.3 Matrices équivalentes

Définition.

On dit que deux matrices $A, B \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ sont *équivalentes* s'il existe $(P, Q) \in \mathrm{GL}_p(\mathbb{K}) \times \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ tel que $B = Q^{-1}AP$.

Propriété 30 (Exemples fondamentaux)

Soient $A, B \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

(1) Si la matrice B se déduit de A à partir d'opérations élémentaires sur ses lignes et ses colonnes, alors A et B sont équivalentes.

(2) Les matrices A et B sont équivalentes si, et seulement si, elles représentent la même application linéaire dans des bases différentes pour l'espace de départ et d'arrivée.

Propriété 31

Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$. Notons $p = \dim(E)$ et $n = \dim(F)$.
Si $\mathrm{rg}(f) = r$, alors il existe $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$ des bases respectives de E et F telles que $M_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f) = J_{r,n,p}$.

Théorème 32

(1) La relation d'équivalence des matrices est une relation d'équivalence sur $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

(2) Deux matrices A et B de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ sont équivalentes si, et seulement si, $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(B)$.

(3) Il y a exactement $\min(n, p) + 1$ classes d'équivalences pour la relation d'équivalence des matrices sur $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, un système de représentants des classes d'équivalences étant donné par les matrices $J_{r,n,p}$ pour $0 \leq r \leq \min(n, p)$.

Remarque. Supposons $n = p$. Pour reformuler ce dernier résultat de manière plus « imagée », nous venons grâce à la relation d'équivalence de « ranger » toutes les matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ dans une grande armoire possédant $n + 1$ tiroirs numérotés de 0 à n :

- dans le r-ème tiroir (avec $r \in [\![0, n]\!]$), on y trouve la matrice $J_{r,n,n}$ ainsi que toutes les matrices de rang r qui lui sont équivalentes ;
- en particulier, dans le tiroir 0, on y trouve une seule matrice, la matrice nulle, et le tiroir n contient tout $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, c'est-à-dire toutes les matrices inversibles de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

3.4 Matrices semblables

Définition.

Soient $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que A et B sont *semblables* s'il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que $B = P^{-1}AP$.

Exercice 12. Quelles sont les matrices semblables à I_n ? à $\lambda \cdot I_n$ pour $\lambda \in \mathbb{K}$?

Propriété 33

La relation ainsi définie, appelée *relation de similitude*, est une relation d'équivalence sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

Remarque. La description des classes d'équivalences pour la relation de similitude est plus difficile que celle pour les matrices équivalentes, et nous ne donnerons pas cette année de système de représentants de ces classes. Nous disposons cependant d'invariants de similitude, c'est-à-dire de propriétés préservées par similitude, qui permettent de distinguer certaines matrices non semblables.

Propriété 34

Si deux matrices sont semblables, **alors** elles ont même trace et même rang.

Exercice 13. Les matrices suivantes sont-elles semblables :

(1) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$; (2) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$; (3) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Mise en garde.

Comme l'illustre l'exercice précédent, la réciproque de cette propriété est fausse : deux matrices ayant même rang et même trace ne sont pas forcément semblables.

Le résultat suivant est la seule condition nécessaire et suffisante que nous donnerons pour montrer que deux matrices soient semblables.

Propriété 35

Deux matrices sont semblables si, et seulement si, elles représentent le même endomorphisme dans des bases distinctes.

Exercice 14. Montrer que les matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ sont semblables.

3.5 Trace d'un endomorphisme

Propriété 36

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie.
Alors la trace de la matrice de f dans une base $\mathscr{B}$ de E est indépendante de la base $\mathscr{B}$ considérée.

Définition.

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie.
On appelle *trace de* f, et on note $\operatorname{tr}(f)$, la trace de la matrice de f dans n'importe quelle base de E.

Exercice 15. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ défini par $f(P) = P + P'$. Calculer $\operatorname{tr}(f)$.

Propriété 37

(1) L'application $\operatorname{tr} : \mathscr{L}(E) \to \mathbb{K}$ est une forme linéaire sur $\mathscr{L}(E)$.

(2) Pour tout $f, g \in \mathscr{L}(E)$, $\operatorname{tr}(f \circ g) = \operatorname{tr}(g \circ f)$.

Propriété 38

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, p un projecteur de E. Alors $\mathrm{tr}(p) = \mathrm{rg}(p)$.