

Calcul algébrique et trigonométrie

1	Sommes et produits	2
1.1	Notations	2
1.2	Propriétés de la somme et du produit	3
1.3	Réorganisation de la sommation	3
1.4	Quelques formules remarquables	5
2	Coefficients binomiaux et formule du binôme	6
2.1	Coefficients binomiaux	6
2.2	Formule du binôme de Newton	7
3	Sommes doubles	8
3.1	Sommes doubles indexées par un rectangle	8
3.2	Sommes doubles indexées par un triangle	9
4	Trigonométrie	9
4.1	Notion de congruence	9
4.2	Sinus, cosinus, tangente	10
4.3	Valeurs remarquables	12
4.4	Formules usuelles	13
4.5	Équations et inéquations trigonométriques	14

Compétences attendues.

- ✓ Apprendre à manipuler les quantités exprimées avec \sum et \prod (règles de calcul, changement d'indice, groupements de termes).
- ✓ Connaître les aspects calculatoires des coefficients binomiaux.
- ✓ Calculer une somme finie à l'aide des sommes finies de référence.
- ✓ Calculer une somme double finie indexée par un rectangle ou un triangle.
- ✓ Connaître les valeurs remarquables de cosinus, sinus et tangente.
- ✓ Connaître et savoir utiliser les formules trigonométriques.
- ✓ Résoudre une équation ou une inéquation trigonométrique.

1 Sommes et produits

1.1 Notations

Soit I un ensemble **fini** non vide. On considère $(a_i)_{i \in I}$ une famille de nombres réels ou complexes indexée par I , associant à tout élément $i \in I$ un unique nombre a_i .

Définition.

On note :

- $\sum_{i \in I} a_i$ la somme des éléments de la famille $(a_i)_{i \in I}$;
- $\prod_{i \in I} a_i$ le produit des éléments de la famille $(a_i)_{i \in I}$.

Par convention, lorsque $I = \emptyset$, $\sum_{i \in I} a_i = 0$ et $\prod_{i \in I} a_i = 1$.

Remarque. Ces définitions ne dépendent pas de l'ordre dans lequel on effectue la somme ou le produit des a_i , du fait de la commutativité et de l'associativité de la somme et du produit dans \mathbb{R} et dans \mathbb{C} .

Notation.

La plupart du temps, I sera un sous ensemble d'entiers. Dans le cas où $I = \llbracket m, n \rrbracket = \{m, m+1, \dots, n-1, n\}$ avec $m \leq n$, on utilisera les notations plus commodes :

$$\sum_{i=m}^n a_i = a_m + a_{m+1} + \dots + a_n \quad \text{et} \quad \prod_{i=m}^n a_i = a_m \times a_{m+1} \times \dots \times a_n \quad (m - n + 1 \text{ termes}).$$



Mise en garde.

Toutes les sommes et tous les produits considérés dans ce chapitre sont **finis** (l'ensemble I d'indices est fini). Le cas de familles **infinies** relève de techniques plus fines, car comme on est amené à faire une infinité d'opérations, il faut s'assurer que le procédé « converge ». Ce cas sera discuté en fin d'année.

Remarque. L'indice i est une « variable muette » : on peut le remplacer par n'importe quel autre symbole non utilisé ailleurs. Ainsi :

$$\sum_{i=m}^n a_i = \sum_{j=m}^n a_j = \sum_{k=m}^n a_k \quad \text{et} \quad \prod_{i=m}^n a_i = \prod_{j=m}^n a_j = \prod_{k=m}^n a_k.$$

En revanche, la variable en question n'a un sens que localement, à l'intérieur de la somme et du produit : par exemple, $\sum_{k=1}^n k^2$ a un sens, ~~$k \sum_{k=1}^n k^2$~~ n'en a pas. Cette variable n'a plus aucune signification en dehors de la somme

ou du produit, et est de nouveau disponible pour une autre utilisation. Par exemple, $\sum_{k=1}^{10} k + \sum_{k=1}^{10} k^2 + \sum_{k=1}^{10} k^3$ a

bien un sens, et aurait tout aussi bien pu s'écrire $\sum_{k=1}^{10} k + \sum_{j=1}^{10} j^2 + \sum_{i=1}^{10} i^3$.

1.2 Propriétés de la somme et du produit

Soient I un ensemble fini et $(a_i)_{i \in I}$, $(b_i)_{i \in I}$ deux familles de nombres réels ou complexes.

Propriété 1 (Linéarité de la somme)

- $\sum_{i \in I} (a_i + b_i) = \sum_{i \in I} a_i + \sum_{i \in I} b_i.$
- pour tout nombre λ réel ou complexe: $\sum_{i \in I} (\lambda \cdot a_i) = \lambda \cdot \left(\sum_{i \in I} a_i \right).$

Propriété 2 (Règles de calculs pour les produits)

- $\prod_{i \in I} (a_i b_i) = \left(\prod_{i \in I} a_i \right) \times \left(\prod_{i \in I} b_i \right).$
- pour tout nombre λ réel ou complexe : $\prod_{i \in I} (\lambda \cdot a_i) = \lambda^p \cdot \left(\prod_{i \in I} a_i \right)$ où $p = \text{Card}(I).$

Propriété 3 (Cas d'une famille constante)

Soit α un nombre réel ou complexe (qui ne dépend pas de l'indice de sommation). Alors :

$$\sum_{i \in I} \alpha = \alpha \times \text{Card}(I) \quad \text{et} \quad \prod_{i \in I} \alpha = \alpha^{\text{Card}(I)}.$$

En particulier : $\sum_{k=p}^q \alpha = \alpha \times (q - p + 1).$

1.3 Réorganisation de la sommation

Changement d'indice

Une somme ou un produit peuvent toujours être écrit de différentes manières selon le choix qu'on fait pour son indexation. Le passage d'une écriture à une autre est appelé *changement d'indice*. Dans le cadre des sommes et produits, les changements d'indices pertinents sont essentiellement de l'une des deux formes suivantes.

Propriété 4 (Glissement et renversement d'indice)

Soient n , p et ℓ trois entiers tels que $n \leq p$. Soit $(a_i)_{i \in \llbracket n, p \rrbracket}$ une famille de réels ou de complexes.

- *Glissement d'indice* $j = i + \ell$: $\sum_{i=n}^p a_i = \sum_{j=n+\ell}^{p+\ell} a_{j-\ell}.$
- *Renversement d'indice* $j = \ell - i$: $\sum_{i=n}^p a_i = \sum_{j=\ell-p}^{\ell-n} a_{\ell-j}.$



Méthode. Comment effectuer un changement d'indice.

Il est inutile d'apprendre ces formules par cœur, nous les retrouverons au cas par cas. Pour effectuer en pratique un changement d'indice :

- on définit le nouvel indice en fonction de l'indice de départ ;
- on exprime la somme avec ce nouvel indice en veillant à changer les bornes de la somme et le terme sous la somme en fonction du nouvel indice.

On vérifiera alors bien que l'on a ni supprimé, ni ajouté de termes à la somme initiale.

Exercice 1. À l'aide du changement d'indice $j = n - k$, déterminer la valeur de la somme $S_n = \sum_{k=1}^n k$.

Donnons-en une application importante aux *sommes télescopiques* de la forme $\sum_{k=\dots}^{\dots} (a_{k+1} - a_k)$.

Propriété 5 (Sommes et produits télescopiques)

Soit $(a_i)_{i \in \llbracket m, n+1 \rrbracket}$ une famille de réels ou de complexes. Alors :

$$\sum_{i=m}^n (a_{i+1} - a_i) = a_{n+1} - a_m.$$

Si de plus les a_i sont tous non nuls : $\prod_{i=m}^n \frac{a_{i+1}}{a_i} = \frac{a_{n+1}}{a_m}$.

Exercice 2. Calculer pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)}$ et $P_n = \prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{k}\right)$.

Sommation ou produit par groupements de termes

Propriété 6 (Sommation et produit par paquets)

Soit $(a_i)_{i \in I}$ une famille finie de nombres réels ou complexes.

Soient I_1, \dots, I_p des sous-ensembles de I deux à deux disjoints (c'est-à-dire qui n'ont pas d'éléments communs : $I_r \cap I_s = \emptyset$ pour tout $1 \leq r < s \leq p$), et tels que $I = I_1 \cup I_2 \cup \dots \cup I_p$.

Alors :

$$\sum_{i \in I} a_i = \sum_{i \in I_1} a_i + \dots + \sum_{i \in I_p} a_i = \sum_{j=1}^p \sum_{i \in I_j} a_i \quad \text{et} \quad \prod_{i \in I} a_i = \left(\prod_{i \in I_1} a_i \right) \times \dots \times \left(\prod_{i \in I_p} a_i \right) = \prod_{j=1}^p \left(\prod_{i \in I_j} a_i \right).$$

Corollaire 7 (Relation de Chasles)

Soient p, q et r trois entiers tels que $p \leq r \leq q$. Soit $(a_i)_{i \in \llbracket p, q \rrbracket}$ une famille de réels ou de complexes. Alors :

$$\sum_{i=p}^q a_i = \sum_{i=p}^r a_i + \sum_{i=r+1}^q a_i \quad \text{et} \quad \prod_{i=p}^q a_i = \left(\prod_{i=p}^r a_i \right) \times \left(\prod_{i=r+1}^q a_i \right).$$



Méthode. Comment calculer une somme à l'aide de regroupements de termes.

On décompose la somme de départ en plusieurs sommes plus simples à calculer. On peut par exemple séparer les termes d'indice pair et les termes d'indice impair lorsque l'occasion se présente.

Exercice 3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer la somme $S_n = \sum_{k=0}^{2n} \min(k, n)$.

Exercice 4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Donner une expression simplifiée de $\sum_{k=1}^{2n} (-1)^k k$.

1.4 Quelques formules remarquables

Rappels sur les suites arithmétiques et géométriques

Définition.

Soit $(u_n)_{n \geq n_0}$ une suite de nombres réels ou complexes.

- La suite $(u_n)_{n \geq n_0}$ est dite *arithmétique de raison r* si pour tout $n \geq n_0$, $u_{n+1} = u_n + r$.
- La suite $(u_n)_{n \geq n_0}$ est dite *géométrique de raison q* si pour tout $n \geq n_0$, $u_{n+1} = qu_n$.

Propriété 8 (Expression explicite)

Soit $(u_n)_{n \geq n_0}$ une suite de nombres réels ou complexes.

- Si $(u_n)_{n \geq n_0}$ est arithmétique de raison r , alors pour tout $n \geq n_0$: $u_n = u_{n_0} + (n - n_0)r$.
- Si $(u_n)_{n \geq n_0}$ est géométrique de raison q , alors pour tout $n \geq n_0$: $u_n = u_{n_0}q^{n-n_0}$.

Somme de progressions arithmétiques et géométriques

Propriété 9 (Somme des termes consécutifs d'une suite arithmétique)

Soient $(u_k)_{k \geq 0}$ une suite arithmétique et $m, n \in \mathbb{N}$ tels que $m \leq n$. Alors :

$$\sum_{k=m}^n u_k = \underbrace{\frac{u_m + u_n}{2}}_{\text{moyenne du 1}^{\text{er}} \text{ et du dernier terme}} \times \underbrace{(n - m + 1)}_{\text{nombre de termes}}.$$

Propriété 10 (Somme des termes consécutifs d'une suite géométrique)

Soient q un nombre réel ou complexe et $m, n \in \mathbb{N}$ tels que $m \leq n$. Alors :

$$\sum_{k=m}^n q^k = \begin{cases} q^m \frac{1 - q^{n-m+1}}{1 - q} & \text{si } q \neq 1 \\ n - m + 1 & \text{si } q = 1 \end{cases}.$$

Soit $(u_k)_{k \geq 0}$ une suite géométrique de raison $q \neq 1$. Alors :

$$\sum_{k=m}^n u_k = u_m \frac{1 - q^{n-m+1}}{1 - q} = (\text{premier terme}) \times \frac{1 - \text{raison}^{\text{nombre de termes}}}{1 - \text{raison}}.$$

Autres sommes remarquables

Propriété 11

Pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$\sum_{k=0}^n k = \frac{n(n+1)}{2} \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

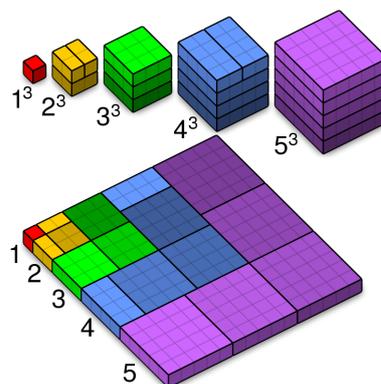
Remarque. Ce procédé peut être poursuivi pour calculer successivement les sommes de puissances (cela nécessite alors d'utiliser la formule du binôme de Newton que nous verrons par la suite). On obtient pour la somme des premiers cubes :

$$\sum_{k=0}^n k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2.$$

Cette égalité peut aussi se retrouver en observant sur l'illustration ci-contre l'égalité des volumes entre le pavé du bas et les cubes disposés au dessus :

$$\sum_{k=1}^n k^3 = \left(\sum_{k=1}^n k \right)^2.$$

D'où l'égalité souhaitée, puisque $\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$.



Propriété 12 (Troisième identité remarquable généralisée)

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, a et b deux nombres réels ou complexes. Alors :

$$\begin{aligned} a^n - b^n &= (a - b) (a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1}) \\ &= (a - b) \times \sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k}b^k = (a - b) \times \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k}. \end{aligned}$$

Remarques.

- Pour $n = 2$, on retrouve le classique $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$.
- Si n est impair,

$$a^n + b^n = a^n - (-b)^n = (a + b) (a^{n-1} - a^{n-2}b + \dots + (-1)^{n-2}ab^{n-2} + (-1)^{n-1}b^{n-1}).$$

2 Coefficients binomiaux et formule du binôme

2.1 Coefficients binomiaux

Définition.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On appelle *factorielle* n et on note $n!$ l'entier défini par $n! = \prod_{k=1}^n k$.

Remarque. Par définition, $0! = 1$ et pour tout $n \geq 1$, $n! = n \times (n - 1)!$.

Définition.

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $p \in \mathbb{Z}$. On appelle *coefficient binomial* « p parmi n » le nombre noté $\binom{n}{p}$ défini par :

$$\binom{n}{p} = \begin{cases} \frac{n!}{p!(n-p)!} & \text{si } p \in \llbracket 0, n \rrbracket \\ 0 & \text{si } p > n \text{ ou } p < 0 \end{cases}.$$

Remarque. Comme on le verra dans un chapitre ultérieur, le coefficient binomial $\binom{n}{p}$ est le nombre de parties à p éléments d'un ensemble de cardinal n .

Propriété 13 (Relations sur les coefficients binomiaux)

Soit n un entier naturel non nul et $p \in \mathbb{Z}$.

(1) *Symétrie des coefficients binomiaux* : $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$.

(2) *Formule du capitaine* : $p \cdot \binom{n}{p} = n \cdot \binom{n-1}{p-1}$.

(3) *Formule du triangle de Pascal* : $\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p}$.

Remarque. Cette dernière relation nous permet de construire le *triangle de Pascal*, qui nous permet d'obtenir rapidement les premiers coefficients binomiaux.

	$p = 0$	$p = 1$	$p = 2$	$p = 3$	$p = 4$	$p = 5$...
$n = 0$	1						
$n = 1$	1	1					
$n = 2$	1	2	1				
$n = 3$	1	3	3	1			
$n = 4$	1	4	6	4	1		
$n = 5$	1	5	10	10	5	1	
\vdots	\vdots	\vdots					
n	1	$\binom{n}{1}$	$\binom{n}{2}$...	$\binom{n}{p}$	$\binom{n}{p+1}$... 1
$n + 1$	1	$\binom{n+1}{1}$	$\binom{n+1}{2}$			$\binom{n+1}{p+1}$... 1

Formule de Pascal :

$$\binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p} = \binom{n}{p}$$

A priori, les coefficient binomiaux sont des rationnels, car quotients de deux entiers. On peut dire bien mieux grâce à la formule du triangle de Pascal.

Propriété 14

Quels que soient les entiers p et n , $\binom{n}{p}$ appartient à \mathbb{N} .

Le saviez-vous ?

Le triangle des coefficients binomiaux, que nous appelons communément « triangle de Pascal » était en fait connu depuis bien longtemps déjà lorsque Blaise Pascal (1623-1662) s'y intéressa : on y trouve mention déjà chez Halayudha, mathématicien indien du 10^{ème} siècle, ainsi qu'en Chine au 13^{ème} siècle. La contribution de Pascal a essentiellement été de démontrer en 1654 un grand nombre de propriétés de ce triangle, jusque-là admises. C'est d'ailleurs à cette occasion qu'il a mis au point le principe de démonstration par récurrence.

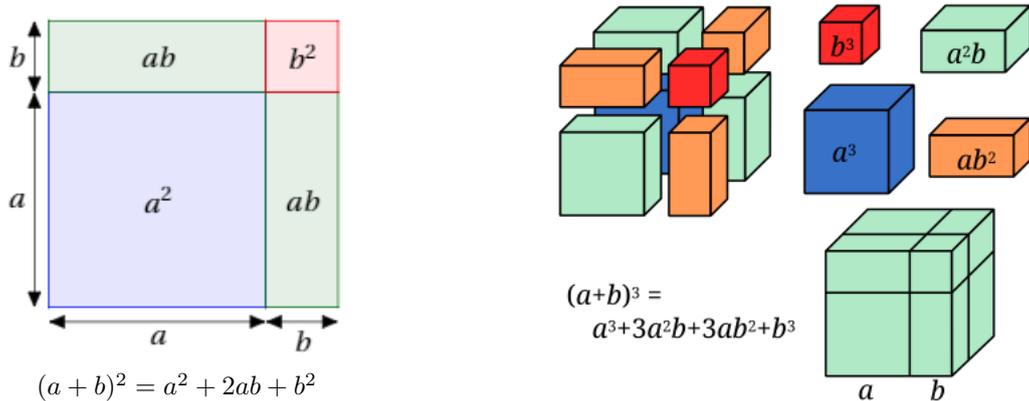
2.2 Formule du binôme de Newton

Théorème 15 (Formule du binôme de Newton)

Soient a et b deux nombres réels ou complexes et n un entier naturel.

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.$$

Représentations graphiques. Cette formule s'interprète géométriquement pour $n = 2$ et $n = 3$.



Exemples.

- Pour $a = b = 1$, on obtient $2^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}$. Ainsi, la somme des coefficients de la n -ème ligne du triangle de Pascal vaut 2^n .
- $(a - b)^n = (a + (-b))^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^{n-k} a^k b^{n-k}$. En particulier pour $a = b = 1$: $0 = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k}$.

Exercice 5. Développer $(a + b)^4$ et $(a - b)^5$.

3 Sommes doubles

3.1 Sommes doubles indexées par un rectangle

On suppose dans cette section que l'ensemble d'indices est $I = \llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, p \rrbracket$ où $(n, p) \in (\mathbb{N}^*)^2$. Une famille de réels ou complexes indexée par I sera notée $(a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$, et sa somme sera notée

$$\sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} a_{i,j}.$$

Pour calculer une telle somme, nous cherchons bien souvent à faire apparaître des sommes simples. On dispose pour cela du résultat suivant.

Propriété 16 (Somme double indexée par un rectangle)

Les égalités suivantes sont satisfaites :

$$\sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} a_{ij} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p a_{ij} = \sum_{j=1}^p \sum_{i=1}^n a_{ij}.$$

Corollaire 17 (Produit de deux sommes)

Soient $(a_i)_{1 \leq i \leq n}$ et $(b_j)_{1 \leq j \leq p}$ deux familles de nombres réels. Alors :

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i \right) \times \left(\sum_{j=1}^p b_j \right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p a_i \times b_j = \sum_{j=1}^p \sum_{i=1}^n a_i \times b_j.$$

Exercice 6. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $S_n = \sum_{0 \leq i, j \leq n} i \times j$.

3.2 Sommes doubles indexées par un triangle

On suppose à présent que $n = p$, et on souhaite faire la somme de tous les coefficients se trouvant au dessus de la diagonale (comprise ou non).

Propriété 18 (Somme double indexée par un triangle)

On dispose des égalités suivantes :

$$\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} a_{ij} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=i}^n a_{ij} = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^j a_{ij} \quad \text{et} \quad \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{ij} = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n a_{ij} = \sum_{j=2}^n \sum_{i=1}^{j-1} a_{ij}.$$

Méthode. Calcul d'une somme double indexée par un triangle.

Ces égalités ne sont pas à apprendre par cœur. On les retrouve aisément en procédant ainsi :

(i) on choisit la variable sur laquelle on somme en premier, par exemple j . On écrit alors les sommes

sans les bornes :
$$\sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=i}^n a_{i,j} \right) ;$$

(ii) on détermine les bornes de la somme $\sum_{i=1}^n$ en regardant l'intervalle d'entiers parcouru par i . Ces bornes ne doivent pas dépendre de j ;

(iii) on détermine enfin les bornes de la deuxième somme $\sum_{j=}$ en fixant i et en regardant l'intervalle d'entiers parcouru par j . Cet intervalle dépend de i .

Exercice 7. Calculer $S_n = \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} \frac{i}{j}$.

Remarque. Toutes les règles sur l'interversion de deux sommes s'étendent sans difficultés aux interversions de produits, en remplaçant le symbole \sum par le symbole \prod .

Corollaire 19

Soient $n \geq 2$ et a_1, \dots, a_n des nombres réels ou complexes.

$$\left(\sum_{k=1}^n a_k \right)^2 = \sum_{k=1}^n a_k^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_i a_j.$$

Remarque. Pour $n = 2$, on retrouve la formule bien connue $(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$. Si $n = 3$, on obtient :

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc.$$

4 Trigonométrie

4.1 Notion de congruence

Définition.

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On dit que deux réels x et y sont *congrus modulo α* s'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $y = x + k\alpha$. On note alors $y \equiv x \pmod{\alpha}$ ou $y \equiv x[\alpha]$.

L'ensemble $\{y \in \mathbb{R} \mid y \equiv x[\alpha]\} = \{x + k\alpha, k \in \mathbb{Z}\}$ est généralement noté $x + \alpha\mathbb{Z}$.

Exemples.

- Être pair, c'est être congru à 0 modulo 2. Être impair, c'est être congru à 1 modulo 2. L'ensemble des entiers pairs est donc $2\mathbb{Z}$ tandis que l'ensemble des entiers impairs est $1 + 2\mathbb{Z}$.
- Un angle orienté est défini modulo 2π , c'est-à-dire que deux angles sont égaux si, et seulement si, leurs mesures sont égales modulo 2π . Par exemple, $7\pi \equiv \pi [2\pi]$ et $\frac{11\pi}{2} \equiv -\frac{\pi}{2} [2\pi]$.

Propriété 20

Soient $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $\alpha, \lambda \in \mathbb{R}^*$.

- (1) Si $a \equiv b [\alpha]$, alors $b \equiv a [\alpha]$.
- (2) Si $a \equiv b [\alpha]$ et $c \equiv d [\alpha]$, alors $a + c \equiv b + d [\alpha]$.
- (3) Si $a \equiv b [\alpha]$, alors $\lambda a \equiv \lambda b [\lambda\alpha]$.

4.2 Sinus, cosinus, tangente

Dans toute la suite, (O, \vec{i}, \vec{j}) est un repère orthonormé direct du plan.

Définition.

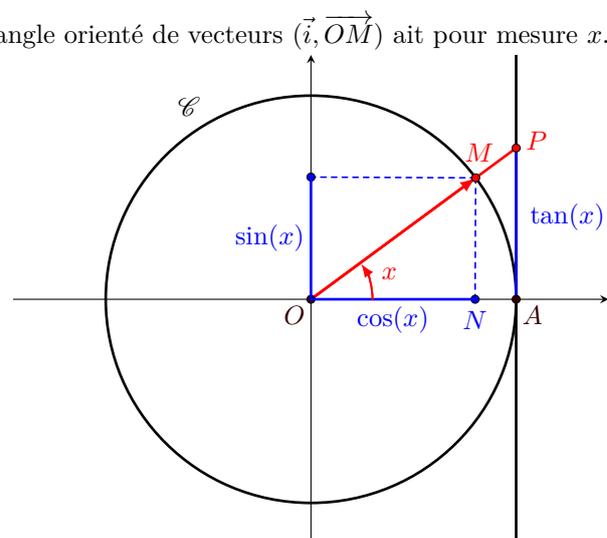
On appelle *cercle trigonométrique* le cercle \mathcal{C} de centre $(0, 0)$ et de rayon 1. Autrement dit,

$$\mathcal{C} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}.$$

Définition.

Soit $x \in \mathbb{R}$. On considère le point M de \mathcal{C} tel que l'angle orienté de vecteurs $(\vec{i}, \overrightarrow{OM})$ ait pour mesure x .

- On appelle *cosinus du réel x* , et on note $\cos(x)$, l'abscisse du point M .
- On appelle *sinus de x* , et on note $\sin(x)$, l'ordonnée du point M .
- Lorsque $x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$, on appelle *tangente de x* , et on note $\tan(x)$, l'ordonnée de P , point d'intersection de la droite (OM) avec la tangente à \mathcal{C} au point A .

**Pour aller plus loin.**

On se contentera de cette définition pour cette année bien qu'elle ne soit pas vraiment satisfaisante : avez-vous un jour défini convenablement un angle orienté de vecteurs ? sa mesure ? le nombre π , si ce n'est que c'est le demi-périmètre d'un cercle de rayon 1... mais qu'est-ce qu'un périmètre ?

Pour bien définir tous ces objets, il faudrait commencer « par la fin » en définissant convenablement les fonctions sinus et cosinus, via les formules suivantes (qui ne sont ni à comprendre, ni à connaître pour le moment) :

$$\cos(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \dots$$

$$\sin(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \dots$$

On pourrait alors définir π comme étant le plus petit réel positif dont le cosinus vaut -1 , puis s'attaquer à la mesure d'un angle orienté... mais ce n'est pas le sujet ici, et il nous manque des connaissances pour entreprendre une telle construction.

Remarque. Ces définitions correspondent bien (au moins dans le cas où $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$) à la trigonométrie du collège : le triangle ONM est rectangle en N , et son hypoténuse est de longueur 1 (puisque M est sur le cercle trigonométrique). Par conséquent :

$$\cos(x) = \cos(\widehat{NOM}) = \frac{ON}{OM} = ON \quad \text{et} \quad \sin(x) = \sin(\widehat{NOM}) = \frac{NM}{OM} = NM.$$

D'autre part, dans le cas où $x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$, intéressons nous au triangle OAP . Les droites (MN) et (AP) étant parallèles, on peut appliquer le théorème de Thalès qui assure l'égalité des rapports de distances algébriques (c'est-à-dire avec un éventuel signe) suivantes :

$$\frac{MN}{AP} = \frac{ON}{OA}, \text{ ce qui se réécrit } \frac{\sin(x)}{\tan(x)} = \frac{\cos(x)}{1}.$$

Ainsi (puisque $\cos(x) \neq 0$ car $x \notin \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}$) :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}, \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}.$$

Propriété 21 (Paramétrisation du cercle trigonométrique)

Si $(x, y) \in \mathcal{C}$, alors il existe un unique $t \in]-\pi, \pi]$ tel que $(x, y) = (\cos(t), \sin(t))$.

Remarque. On a choisi de prendre $t \in]-\pi, \pi]$, mais on aurait également pu prendre $t \in [0, 2\pi[$, ou encore dans n'importe quel intervalle de longueur 2π ouvert d'un côté et fermé de l'autre.

Corollaire 22

Soit $r > 0$ et soit $\mathcal{C}_r = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = r\}$.

Pour tout $(x, y) \in \mathcal{C}_r$, il existe un unique $\theta \in]-\pi, \pi]$ tel que $(x, y) = (r \cos(\theta), r \sin(\theta))$.

Remarque. Ceci est à la base des coordonnées dites polaires qu'on utilise notamment en physique : tout point (x, y) de \mathbb{R}^2 différent de O est sur un unique cercle de centre O (celui de rayon $\sqrt{x^2 + y^2}$). Et donc il existe un unique couple $(r, \theta) \in \mathbb{R}_+^* \times]-\pi, \pi]$ tel que :

$$(x, y) = (r \cos(\theta), r \sin(\theta)).$$

Autrement dit, au lieu de repérer un point par son abscisse et son ordonnée comme on en a l'habitude, on peut se donner un rayon (la distance du point à l'origine) et un angle.

Propriété 23

Soit x un réel. Alors :

$$(1) \cos(x)^2 + \sin(x)^2 = 1.$$

$$(4) \cos(x + 2\pi) = \cos(x).$$

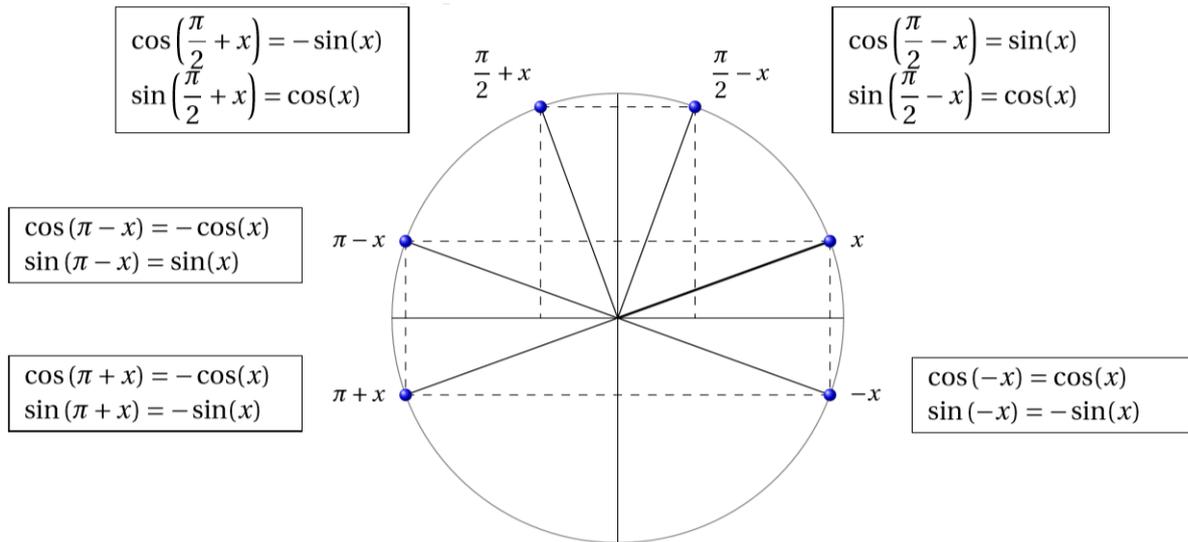
$$(2) \cos(x) \in [-1, 1] \text{ et } \sin(x) \in [-1, 1].$$

$$(5) \sin(x + 2\pi) = \sin(x).$$

$$(3) \text{ Si } x \notin \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}, 1 + \tan(x)^2 = \frac{1}{\cos(x)^2}.$$

$$(6) \text{ Si } x \notin \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}, \tan(x + \pi) = \tan(x).$$

Nous obtenons les relations suivantes par une lecture efficace du cercle trigonométrique.



Astuce.

Il est inutile d'apprendre par cœur ces formules : elles se retrouvent facilement avec un cercle trigonométrique. Donnons quelques conseils de bon sens pour cela :

- dessinez un cercle trigonométrique suffisamment grand pour y voir quelque chose. Cela peut être fait directement dans une copie, personne ne vous le reprochera (bien au contraire) ;
- ne prenez pas un angle proche de $\frac{\pi}{4}$, vous ne sauriez alors plus distinguer $\sin(x)$ de $\cos(x)$. Prendre x proche de 0 (par exemple environ $\frac{\pi}{6}$) est plus sage.

Remarques. À partir des formules $\cos(x \pm \pi) = -\cos(x)$ et $\sin(x \pm \pi) = -\sin(x)$, on montre par récurrence que pour tout $k \in \mathbb{Z}$:

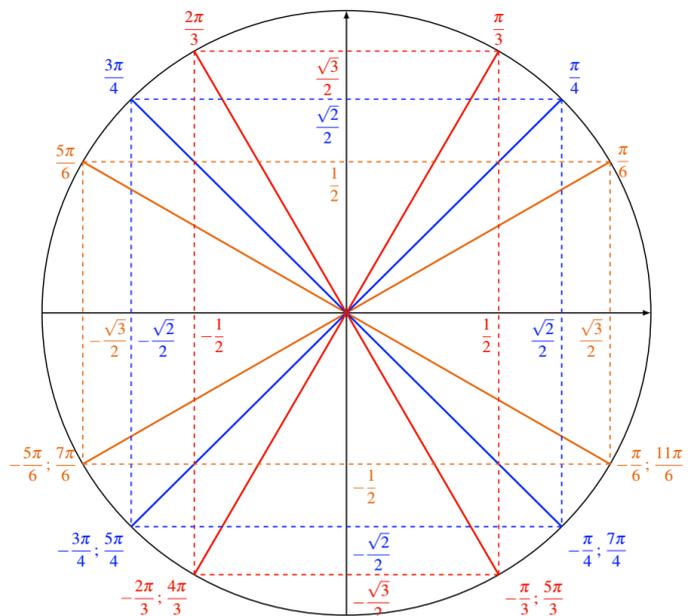
$$\cos(x + k\pi) = (-1)^k \cos(x) \quad \text{et} \quad \sin(x + k\pi) = (-1)^k \sin(x).$$

En particulier, $\cos(k\pi) = (-1)^k$ et $\sin(k\pi) = 0$.

4.3 Valeurs remarquables

Les valeurs remarquables des fonctions trigonométriques sont à connaître par cœur.

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
$\tan(x)$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$		0



4.4 Formules usuelles

Propriété 24 (Formules d'addition)

Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Alors :

- $\cos(a + b) = \cos(a) \cos(b) - \sin(a) \sin(b)$.
- $\cos(a - b) = \cos(a) \cos(b) + \sin(a) \sin(b)$.
- $\sin(a + b) = \sin(a) \cos(b) + \sin(b) \cos(a)$.
- $\sin(a - b) = \sin(a) \cos(b) - \sin(b) \cos(a)$.

Propriété 25 (Formules d'addition pour la tangente)

Soient a, b deux réels. Sous réserve que toutes les tangentes suivantes existent :

- $\tan(a + b) = \frac{\tan(a) + \tan(b)}{1 - \tan(a) \tan(b)}$.
- $\tan(a - b) = \frac{\tan(a) - \tan(b)}{1 + \tan(a) \tan(b)}$.

Propriété 26 (Formules de duplication)

Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\cos(2x) = \cos(x)^2 - \sin(x)^2 = 2 \cos(x)^2 - 1 = 1 - 2 \sin(x)^2.$$

$$\sin(2x) = 2 \sin(x) \cos(x).$$

En particulier :

$$\cos(x)^2 = \frac{1 + \cos(2x)}{2} \quad \text{et} \quad \sin(x)^2 = \frac{1 - \cos(2x)}{2}.$$

Propriété 27 (Formules de l'arc moitié)

Soit $x \notin \pi + 2\pi\mathbb{Z}$. Notons $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$. Alors :

$$\cos(x) = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}, \quad \sin(x) = \frac{2t}{1 + t^2}$$

et si $x \notin \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}$, alors : $\tan(x) = \frac{2t}{1 - t^2}$.

Propriété 28 (Formules de linéarisation)

Si a et b sont deux réels, alors :

- $\cos(a) \cos(b) = \frac{1}{2} [\cos(a + b) + \cos(a - b)]$.
- $\sin(a) \sin(b) = \frac{1}{2} [\cos(a - b) - \cos(a + b)]$.
- $\sin(a) \cos(b) = \frac{1}{2} [\sin(a + b) + \sin(a - b)]$.

4.5 Équations et inéquations trigonométriques

Propriété 29

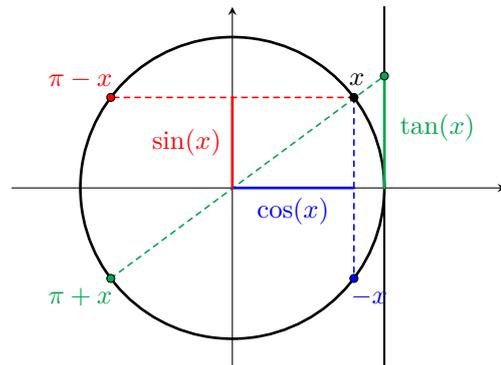
Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$:

$$\cos(x) = \cos(y) \Leftrightarrow (x \equiv y [2\pi] \text{ ou } x \equiv -y[2\pi]),$$

$$\sin(x) = \sin(y) \Leftrightarrow (x \equiv y [2\pi] \text{ ou } x \equiv \pi - y[2\pi]).$$

Pour tous $x, y \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$:

$$\tan(x) = \tan(y) \Leftrightarrow x \equiv y [\pi].$$



Exercice 8. Résoudre les équations suivantes d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

$$(E_1) : \cos(2x) = -\frac{\sqrt{3}}{2}; \quad (E_2) : \sin(x) = \cos(x); \quad (E_3) : \cos(x)^4 - \sin(x)^4 = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Exercice 9. Résoudre l'inéquation $\cos(x) > \frac{1}{\sqrt{2}}$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

Propriété 30 (Transformation de $a \cos(x) + b \sin(x)$)

Soient a et b deux réels. Alors il existe un réel φ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad a \cos(x) + b \sin(x) = \sqrt{a^2 + b^2} \cos(x - \varphi).$$

Interprétation physique. La somme de deux signaux périodiques de même période est encore un signal périodique de même période. Son amplitude est $\sqrt{a^2 + b^2}$ et son déphasage vaut φ .

Exercice 10. Résoudre l'équation $\cos(x) + \sqrt{3} \sin(x) = -1$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.