Chapitre 30

Variables aléatoires finies

Compétences attendues.

✓ Déterminer la loi d'une variable aléatoire.

✓ Identifier et utiliser une loi usuelle, son espérance, sa variance.

✓ Calculer l'espérance et la variance d'une variable aléatoire réelle.

Anthony Mansuy - Professeur en MP2I au Lycée Roosevelt (Reims)
Page personnelle : `anthony-mansuy.fr/`
E-mail : `mansuy.anthony@hotmail.fr`

1 Variables aléatoires finies

1.1 Définition

Définition.

Soit Ω un ensemble fini, et soit E un ensemble.
On appelle *variable aléatoire sur* Ω *à valeurs dans* E toute application $X : \Omega \to E$.
Dans le cas où $E \subset \mathbb{R}$, la variable aléatoire est dite *réelle*.

Exemples.

- On lance un dé à six faces 2 fois, ce qu'on modélise à l'aide de l'univers $\Omega = [\![1,6]\!]^2$. Les applications
$$S : \left\{ \begin{array}{ccc} \Omega & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & x+y \end{array} \right. \quad \text{et} \quad M : \left\{ \begin{array}{ccc} \Omega & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & \max(x,y) \end{array} \right.$$
sont des variables aléatoires réelles, renvoyant respectivement la somme des deux lancers et le plus grand numéro obtenu lors de ces lancers.
Par exemple pour $\omega = (2,5) \in \Omega$, $S(\omega) = 7$ et $T(\omega) = 5$.
- On tire simultanément 4 entiers entre 1 et 10. On peut choisir pour univers Ω l'ensemble $\mathscr{P}_4([\![1,10]\!])$ des 4-combinaisons de $[\![1,10]\!]$. L'application
$$X : \left\{ \begin{array}{ccc} \Omega & \to & \mathbb{R} \\ \omega & \mapsto & \min(\omega) \end{array} \right.$$
est une variable aléatoire réelle, renvoyant le plus petit entier tiré.
Par exemple pour $\omega = \{2,5,6,8\} \in \Omega$, $X(\omega) = 2$.
- On effectue deux tirages sans remise dans une urne qui contient trois boules rouges et deux blanches. On peut modéliser cette expérience par l'univers $\Omega = \{R,B\}^2$. L'application C à valeurs dans $\{R,B\}$ qui donne la couleur de la seconde boule tirée est une variable aléatoire non réelle.

Définition.

Soit $X : \Omega \to E$ une variable aléatoire.
On appelle *image de* X, et on note $X(\Omega)$, l'ensemble $\{X(\omega),\ \omega \in \Omega\}$ des valeurs prises par X.
C'est un sous-ensemble fini de E (puisque Ω est supposé fini).

Exemples. Pour les exemples précédents, $S(\Omega) = [\![2,12]\!]$, $M(\Omega) = [\![1,6]\!]$, $X(\Omega) = [\![1,7]\!]$, $C(\Omega) = \{R,B\}$.

✎ **Notation.**

- Pour $A \in \mathscr{P}(E)$, on note $[X \in A]$ (ou $(X \in A)$) l'événement :
$$[X \in A] = X^{-1}(A) = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in A\}.$$
Lorsque $A = \{a\}$, on note plus simplement $[X = a]$ (ou $(X = a)$) au lieu de $[X \in \{a\}]$.
- Si X est une variable aléatoire réelle, on note pour tout $a \in \mathbb{R}$, $[X \leq a]$ (ou $(X \leq a)$) l'événement :
$$[X \leq a] = [X \in]-\infty, a]] = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leq a\}.$$
De même, on définit les événements $[X < a]$, $[X \geq a]$, $[X > a]$, $[a \leq X \leq b]$, ...

Exemples. Toujours avec les notations des exemples précédents :
$$[S > 10] = \{(5,6),(6,5),(6,6)\}, \quad [M \leq 6] = \Omega, \quad [X \geq 7] = [X = 7] = \{\{7,8,9,10\}\}.$$

1.2 Loi d'une variable aléatoire

Définition.

Soit X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé fini (Ω, P).
On appelle *loi de X*, et on note P_X, l'application :

$$P_X : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathscr{P}(X(\Omega)) & \to & [0,1] \\ A & \mapsto & P(X \in A) = P(X^{-1}(A)) \end{array} \right. .$$

Propriété 1

La loi P_X de X est une probabilité sur $X(\Omega)$.

Propriété 2

Soit $X : \Omega \to E$ une variable aléatoire sur (Ω, P) à valeurs dans E.

(1) La famille $([X = x])_{x \in X(\Omega)}$ est un système complet d'événements de Ω. En particulier :

$$\sum_{x \in X(\Omega)} P(X = x) = 1.$$

(2) Pour tout $A \in \mathscr{P}(E)$:

$$P(X \in A) = \sum_{x \in A} P(X = x).$$

Corollaire 3

Soit X une variable aléatoire sur (Ω, P). La loi de X est entièrement déterminée par la donnée :

- de l'image $X(\Omega)$ de X ;
- des $P(X = x)$ pour $x \in X(\Omega)$.

Méthode. Comment déterminer la loi d'une variable aléatoire X ?

Pour déterminer la loi de X, on n'explicitera pas la probabilité P_X, on se contentera de déterminer :

- *son image $X(\Omega)$;*
- *les probabilités $P(X = x)$ pour $x \in X(\Omega)$.*

Exercice 1. On tire simultanément 4 entiers entre 1 et 10, et on note X le plus petit entier tiré. Déterminer la loi de la variable X.

Propriété 4 (Caractérisation d'une loi de probabilité)

Soient $n \geq 1$ et $x_1, \ldots, x_n$ des éléments deux à deux distincts d'un ensemble E. Considérons $(p_k)_{1 \leq k \leq n}$ une famille de réels satisfaisant :

- $p_k \geq 0$ pour tout $k \in [\![1, n]\!]$;
- $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} p_k = 1$.

Alors la famille (p_k) est une *loi de probabilité* : il existe un espace probabilisé fini (Ω, P) et une variable aléatoire $X : \Omega \to E$ tels que :

$$X(\Omega) = \{x_1, \ldots, x_n\} \text{ et } P(X = x_k) = p_k \text{ pour tout } k \in [\![1, n]\!].$$

Exercice 2. À quelle condition sur $\lambda \in \mathbb{R}$ existe-t-il une variable aléatoire X à valeurs dans $[\![1, n]\!]$ telle que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $P(X = i) = \lambda i$?

Remarque. Cette propriété nous dispense de nous interroger sur l'espace probabilisé (Ω, P) de départ lorsqu'on définit une variable aléatoire X : un tel espace existe, mais il ne sera pas nécessaire en général de l'expliciter. Seule la loi de X est nécessaire pour calculer les probabilités $P(X \in A)$ pour $A \subset E$.

Définition.

Soient X et Y des variables à valeurs dans un ensemble E, non nécessairement définies sur le même espace probabilisé. On dit que X et Y sont *identiquement distribuées* ou *de même loi*, et on note $X \sim Y$, si $P_X = P_Y$.

Remarque. Dire que $X : (\Omega_1, P_1) \to E$ et $Y : (\Omega_2, P_2) \to E$ sont identiquement distribuées si, et seulement si, pour tout $z \in E$, $P_1(X = z) = P_2(Y = z)$.

Mise en garde.

Deux variables définies sur un même espace et de même loi ne sont pas égales pour autant.

Par exemple pour le lancer de deux dés équilibrés, notons X le résultat du premier dé, et Y le résultat du second. Alors X et Y ont même loi, mais elles ne sont pas égales (les deux dés ne valant pas toujours la même valeur).

Propriété 5

Soient X une variable aléatoire sur (Ω, P) à valeurs dans E, et $f : E \to F$ une application.

Alors $f \circ X : \Omega \to F$ est une variable aléatoire sur (Ω, P), notée $f(X)$, de loi donnée par $f(X)(\Omega) = f(X(\Omega))$ et :

$$\forall y \in f(X(\Omega)), \quad P(f(X) = y) = \sum_{\substack{x \in X(\Omega) \\ f(x) = y}} P(X = x).$$

Propriété 6

Soient X et Y des variables à valeurs dans E, et $f : E \to F$ une application.

Si $X \sim Y$, alors $f(X) \sim f(Y)$.

Exercice 3. Soit X une variable à valeurs dans $[\![1, 2n]\!]$ telle que $P(X = i) = \dfrac{1}{2n}$ pour tout $i \in [\![1, 2n]\!]$. Quelle est la loi de $Y = (-1)^X$?

1.3 Lois usuelles

Variable certaine

Définition.

On dit qu'une variable aléatoire $X : (\Omega, P) \to E$ suit *la loi certaine égale à* $a \in E$ si $a \in X(\Omega)$ et $P(X = a) = 1$.

Loi uniforme

Définition.

Soit E un ensemble fini. On dit qu'une variable aléatoire $X : (\Omega, P) \to E$ suit *la loi uniforme sur* E, et on note $X \sim \mathscr{U}(E)$, si $X(\Omega) = E$ et :

$$\forall x \in E, \quad P(X = x) = \frac{1}{\mathrm{Card}(E)}.$$

Cas particuliers. Si $X \sim \mathscr{U}([\![a,b]\!])$ où $a, b \in \mathbb{Z}$ avec $a \leq b$, $P(X=k) = \dfrac{1}{b-a+1}$ pour tout $k \in [\![a,b]\!]$. En particulier, si $X \sim \mathscr{U}([\![1,n]\!])$, alors $P(X=k) = \dfrac{1}{n}$ pour tout $k \in [\![1,n]\!]$.

Exemple. Les lois uniformes se rencontrent lorsqu'on est en situation d'équiprobabilité. Par exemple :

- une urne contient n boules numérotées de 1 à n. On pioche une boule au hasard et on note X le numéro de la boule piochée. Alors X suit la loi uniforme sur $[\![1,n]\!]$.
- on lance un dé équilibré et on note X le numéro obtenu. Alors X suit la loi $\mathscr{U}([\![1,6]\!])$.

Loi de Bernoulli

Définition.

Soit $p \in [0,1]$. On dit qu'une variable aléatoire $X : (\Omega, P) \to \mathbb{R}$ suit la *loi de Bernoulli de paramètre* p, et on note $X \sim \mathscr{B}(p)$, si :

$$X(\Omega) = \{0,1\} \quad \text{et} \quad P(X=1) = p,\ P(X=0) = 1-p.$$

Remarque. La situation type modélisée par une loi de Bernoulli est celle d'une expérience aléatoire à deux issues : succès avec probabilité $p \in [0,1]$, échec avec probabilité $1-p$. Une telle épreuve est appelée *épreuve de Bernoulli*. La variable X égale à 1 en cas de succès et 0 sinon, suit la loi de Bernoulli $\mathscr{B}(p)$.

Exemples.

- On lance une pièce qui a une probabilité p de tomber sur pile. Soit X la variable aléatoire valant 1 si on tombe sur pile et 0 sinon. Alors X suit la loi $\mathscr{B}(p)$.
- Soit une urne contenant a boules blanches et b boules noires. On note X la variable aléatoire égale à 1 si on tire une boule blanche et 0 si on tire une boule noire. Alors X suit la loi $\mathscr{B}\left(\dfrac{a}{a+b}\right)$.

Remarque. Toute variable aléatoire qui ne prend que les valeurs 0 et 1 suit une loi de Bernoulli. En particulier, la variable indicatrice d'un événement A :

$$\mathbb{1}_A : \omega \in \Omega \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } \omega \in A \\ 0 & \text{si } \omega \notin A \end{cases}$$

suit la loi de Bernoulli de paramètre $p = P(\mathbb{1}_A = 1) = P(\{\omega \in A\}) = P(A)$.

Loi binomiale

Définition.

Soit $p \in [0,1]$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On dit qu'une variable aléatoire $X : (\Omega, P) \to \mathbb{R}$ suit la *loi binomiale de paramètres n et p*, et on note $X \sim \mathscr{B}(n,p)$, si :

$$X(\Omega) = [\![0,n]\!] \quad \text{et} \quad P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \quad \text{pour tout } k \in [\![0,n]\!].$$

Remarque. Lorsqu'on répète n fois une même épreuve de Bernoulli de manière **identique** et **indépendante**, alors la variable X qui compte le nombre de succès suit la loi binomiale $\mathscr{B}(n,p)$.

Exemples.

- On lance n fois une pièce qui a la probabilité $p \in [0,1]$ de tomber sur pile. Si X désigne le nombre de piles obtenus, alors X suit la loi $\mathscr{B}(n,p)$.
- On effectue n tirages **avec remise** dans une urne contenant a boules blanches et b boules noires. Alors la variable X égale au nombre de boules blanches obtenues suit la loi $\mathscr{B}\left(n, \dfrac{a}{a+b}\right)$.
- Pour $n = 1$, la loi $\mathscr{B}(1,p)$ est la loi de Bernoulli $\mathscr{B}(p)$.

2 Espérance

2.1 Définition

Définition.

Soit X une variable aléatoire réelle définie sur un espace probabilisé fini (Ω, P).
On appelle *espérance de* X, et on note $E(X)$, le réel défini par :

$$E(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} xP(X = x).$$

On dit que X est *centrée* si $E(X) = 0$.

Remarques.

- L'espérance est un *indicateur de position* : c'est la moyenne des valeurs prises par X, chacune étant pondérée par sa probabilité d'occurrence.
- L'espérance d'une variable aléatoire ne dépend que de sa loi : deux variables aléatoires réelles de même loi ont même espérance.

Propriété 7

Soit X une variable aléatoire réelle sur un espace probabilisé fini (Ω, P). Alors :

$$E(X) = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega)P(\{\omega\}).$$

Exercice 4. Calculer l'espérance des variables aléatoires suivantes :

1. la variable aléatoire X de loi donnée par
$$X(\Omega) = [\![1, n]\!] \text{ et } P(X = i) = \frac{2i}{n(n+1)} \text{ pour tout } i \in [\![1, n]\!] \;;$$
2. $\mathbb{1}_A$ pour $A \in \mathscr{P}(\Omega)$ un événement.

Le saviez-vous ?

Après avoir entendu parler de la correspondance de Blaise Pascal (1623 - 1662) et Pierre de Fermat (1607 - 1665) au sujet du *problème des partis* lors d'un voyage à Paris en 1655, le mathématicien hollandais Christiaan Huygens (1629 - 1695) publie le premier livre sur le calcul des probabilités dans les jeux de hasard en 1657. Il y introduit comme notion fondamentale la « valeur de l'espérance » d'une situation d'incertitude. Pour nommer ce nouveau concept, il hésite entre les mots latins *spes* et *expectatio* signifiant respectivement *espoir* et *espérance*. Quelques années plus tard, il définit l'espérance de vie.

Christiaan Huygens (1629 - 1695).

Christiaan Huygens est également célèbre pour sa découverte de Titan, plus grand satellite de Saturne, et pour son invention de l'horloge à pendule qui améliora la précision des horloges existantes, la faisant passer de 15 minutes à 15 secondes par jour.

2.2 Espérances des lois usuelles

Propriété 8

Soit X une variable aléatoire réelle définie sur un espace probabilisé fini (Ω, P).

(1) Si X suit la loi certaine égale à a, alors $E(X) = a$.

(2) Si $X \sim \mathscr{B}(p)$ avec $p \in [0,1]$, alors $E(X) = p$.

(3) Si $X \sim \mathscr{B}(n,p)$ avec $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [0,1]$, alors $E(X) = np$.

(4) Si $X \sim \mathscr{U}(\llbracket a,b \rrbracket)$ avec $a, b \in \mathbb{Z}$ tels que $a \leq b$, alors $E(X) = \dfrac{a+b}{2}$.

En particulier, si $X \sim \mathscr{U}(\llbracket 1,n \rrbracket)$ avec $n \in \mathbb{N}^*$, alors $E(X) = \dfrac{n+1}{2}$.

2.3 Propriétés de l'espérance

Propriété 9 (Linéarité de l'espérance)

L'espérance est une forme linéaire sur l'espace des variables aléatoires réelles sur (Ω, P) : pour toutes variables aléatoires réelles X et Y sur (Ω, P), pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$E(\lambda X + Y) = \lambda E(X) + E(Y).$$

Corollaire 10

Si X est une variable aléatoire réelle, alors pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$:

$$E(aX + b) = aE(X) + b.$$

En particulier, $X - E(X)$ est une variable aléatoire centrée.

Propriété 11 (Positivité de l'espérance)

Soit X une variable aléatoire positive sur (Ω, P). Alors $E(X) \geq 0$.
De plus, $E(X) = 0$ si, et seulement si, X suit la loi certaine égale à 0.

Corollaire 12 (Croissance de l'espérance)

Soient X et Y deux variables définies sur (Ω, P) telles que $X \leq Y$. Alors $E(X) \leq E(Y)$.

Théorème 13 (*Théorème du transfert*)

Soient X une variable aléatoire sur (Ω, P) et $g : X(\Omega) \to \mathbb{R}$. Alors :

$$E(g(X)) = \sum_{x \in X(\Omega)} g(x) P(X = x).$$

Exercice 5. Soient X une variable aléatoire qui suit la loi binomiale $\mathscr{B}(n,p)$ et $Y = X(X-1)$. Calculer $E(Y)$.

3 Variance

3.1 Définitions

Définition.

Soit X une variable aléatoire réelle sur (Ω, P). On appelle *moment d'ordre $k \in \mathbb{N}$ de X* le réel $E(X^k)$.

Remarques.

- Le moment d'ordre 0 vaut 1, le moment d'ordre 1 est l'espérance.
- Par le théorème de transfert, $E(X^k) = \sum_{x \in X(\Omega)} x^k P(X = x)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Exercice 6. Calculer le moment d'ordre 2 d'une variable X suivant une loi binomiale $\mathscr{B}(n, p)$.

Définition.

Soit X une variable aléatoire réelle sur (Ω, P). On appelle *variance de X*, et on note $V(X)$, le moment d'ordre 2 de $X - E(X)$, c'est-à-dire le réel :

$$V(X) = E\left((X - E(X))^2\right).$$

Remarques.

- La variance est un *indicateur de dispersion* : il s'agit de l'écart quadratique (quadratique parce qu'on passe au carré) moyen de X avec sa moyenne $E(X)$. Plus la variance est élevée, plus X a une probabilité élevée de prendre des valeurs éloignées de son espérance. Et plus la variance est faible, plus X à une probabilité faible de prendre ses valeurs autour de $E(X)$.
- La variance d'une variable aléatoire ne dépend que de sa loi : deux variables aléatoires réelles de même loi ont même variance.

Théorème 14 (*Formule de Koenig* (1712 - 1757) - *Huygens* (1629 - 1695))

Soit X une variable aléatoire réelle. Alors :

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2.$$

Exercice 7. Soit X une variable aléatoire de loi donnée par

$$X(\Omega) = [\![1, n]\!] \text{ et pour tout } i \in [\![1, n]\!],\ P(X = i) = \frac{2i}{n(n+1)}.$$

Calculer $V(X)$.

3.2 Propriétés de la variance

Propriété 15

Soit X une variable aléatoire réelle sur (Ω, P). Alors $V(X) \geq 0$.
De plus, $V(X) = 0$ si, et seulement si, X suit la loi certaine égale à $E(X)$.

Propriété 16

Soit X est une variable aléatoire réelle. Pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$:

$$V(aX+b) = a^2 V(X).$$

Danger.

Contrairement à l'espérance, la **variance n'est pas linéaire** : $V(aX) \cancel{=} aV(X)$ en général. De même, nous verrons prochainement que $V(X+Y) \cancel{=} V(X) + V(Y)$ en général.

Définition.

Soit X une variable aléatoire réelle sur (Ω, P).
On appelle *écart-type de* X, et on note $\sigma(X)$, le réel $\sqrt{V(X)}$. On dit que X est *réduite* si $\sigma(X) = 1$.

Propriété 17

Soit X une variable aléatoire qui ne suit pas une loi certaine (de sorte que $\sigma(X) \neq 0$).
Alors $Y = \dfrac{X - E(X)}{\sigma(X)}$ est une variable centrée réduite, qu'on appelle *variable centrée réduite associée à* X.

3.3 Variances des lois usuelles

Propriété 18

Soit X une variable aléatoire réelle définie sur un espace probabilisé fini (Ω, P).

(1) Si X suit une loi certaine, alors $V(X) = 0$.

(2) Si $X \sim \mathscr{B}(p)$ avec $p \in [0,1]$, alors $V(X) = p(1-p)$.

(3) Si $X \sim \mathscr{B}(n,p)$ avec $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [0,1]$, alors $V(X) = np(1-p)$.

(4) Si $X \sim \mathscr{U}(\llbracket a,b \rrbracket)$ avec $a,b \in \mathbb{Z}$ tels que $a \leq b$, alors $V(X) = \dfrac{(b-a+1)^2 - 1}{12}$.

En particulier, si $X \sim \mathscr{U}(\llbracket 1,n \rrbracket)$, alors $V(X) = \dfrac{n^2-1}{12}$.

3.4 Table des lois finies usuelles

DÉNOMINATION	NOTATION	PARAMÈTRES	SUPPORT	PROBABILITÉS	ESPÉRANCE	VARIANCE
Loi uniforme	$\mathscr{U}(\llbracket 1,n\rrbracket)$	$n\in\mathbb{N}^*$	$\llbracket 1,n\rrbracket$	$P(X=k)=\dfrac{1}{n}$	$\dfrac{n+1}{2}$	$\dfrac{n^2-1}{12}$
	$\mathscr{U}(\llbracket a,b\rrbracket)$	$a,b\in\mathbb{Z},\ a\leq b$	$\llbracket a,b\rrbracket$	$P(X=k)=\dfrac{1}{b-a+1}$	$\dfrac{a+b}{2}$	$\dfrac{(b-a)(b-a+2)}{12}$
Loi de Bernoulli	$\mathscr{B}(p)$	$p\in]0,1[$	$\{0,1\}$	$P(X=1)=p$ $P(X=0)=1-p$	p	$p(1-p)$
Loi binomiale	$\mathscr{B}(n,p)$	$n\in\mathbb{N}^*,\ p\in]0,1[$	$\llbracket 0,n\rrbracket$	$P(X=k)=\dbinom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$	np	$np(1-p)$